JEAN PIAGET

con la colaboración de

R. GARCIA

LAS EXPLICACIONES CAUSALES



BREVE
BIBLIOTECA DE RESPUESTA

BARRAL EDITORES
1973

Título de la edición original:
Les explications causales

Traducción de:
Elena R. Póliza

Revisión de:
Horacio González Trejo

Primera edición: marzo, 1973

ISBN 84-211-0264-8

Depósito Legal: B. 9846 - 1973 Printed in Spain

INTRODUCCION

Las investigaciones del Centro Internacional de Epistemología Genética, en los últimos años, han tratado sobre la causalidad, en el sentido más amplio de este término, abarcando toda explicación de un fenómeno material (incluso, llegado el caso, las acciones específicas en sus aspectos físicos y relacionados con los objetos). Ahora bien, el desarrollo de la causalidad así comprendida plantea problemas más difíciles que el estudio de las operaciones del sujeto. En razón de que éstas traducen, esencialmente, las coordinaciones generales de la acción, los estadios de su elaboración obedecen a una lógica interna que, tarde o temprano, el análisis llega a revelar y que se encuentra con una regularidad bastante sorprendente en campos muy diversos. Explicar un fenómeno físico supone, ciertamente, el empleo de tales operaciones, pues la investigación de la causalidad siempre llega a superar lo observable y a recurrir a enlaces inferidos, y, en consecuencia, operatorios. Pero aquí se agregan, y esto es lo esencial, las respuestas del objeto, ya que hablar de causalidad supone que los objetos existen exteriormente a nosotros y que actúan los unos sobre los otros independientemente de nosotros: si el modelo causal adoptado comporta una parte inferencial es con el único propósito de alcanzar esas propiedades del objeto. Así, éstas pueden tanto resistirse como ceder al tratamiento operatorio empleado por el sujeto: de ahí que un desarrollo de las explicaciones en nada garantiza, por adelantado, que presentará la misma regularidad ni la misma simplicidad relativa que el de las operaciones lógico-matemáticas en sí mismas.

Por lo tanto, después de un período en que llegamos hasta a dudar de la existencia de estadios en el seno de esta evolución, debimos dedicarnos a una serie de investigaciones mucho más considerables que las previstas al comenzar la tarea, tan diversos eran los dominios a explorar. Además, como cada nuevo análisis corría el riesgo de contradecir más que de completar a uno u otro de los precedentes (porque, repetimos, la explicación causal depende más de los objetos que del sujeto), hubiera sido una imprudencia publicar nuestros primeros resultados antes de haber alcanzado cietro grado de seguridad. Ahora bien, actualmente nos encontramos en la siguiente situación: en posesión de un centenar de trabajos consumados y ya redactados, esperamos distribuirlos en varios fascículos que abarcarán las cuestiones esenciales de la explicación causal (transmisión de los movimientos, problemas de direcciones, composición de las fuerzas, razón suficiente, estados de la materia, intercambios de calor, etc.), pero tememos que, al pasar de un fascículo a otro, el lector no llegará a percibir las hipótesis directrices ni los resultados de conjunto.

Con la finalidad de remediar este estado de cosas ha sido escrita la presente introducción. Ella no pretende, en absoluto, reemplazar los análisis de detalle pues, en tales dominios, sólo cuentan los hechos suficientemente elaborados, para justificar las interpretaciones. Por el contrario, ella se propone, al resumir, a grandes rasgos, las nociones acumuladas, precisar los principales problemas que surgen e indicar en qué dirección parecería posible resolverlos. En posesión de este hilo conductor, el lector podrá volver a ubicarse más fácilmente en los *Estudios* ulteriores, pudiendo entonces, simultáneamente, cada capítulo particular formar parte de un todo e insertarse en el cuadro general.

En efecto, la hipótesis a que los hechos nos han conducido resulta, finalmente, de una gran simplicidad. Mientras E. Meyerson veía en la causalidad un producto apriorístico que enfrentaba una razón identificatoria con una realidad distinta e irracional, y mientras Ph. Frank nos dice que ha duda-

do, durante toda su carrera, en hacer de esta causalidad una ley de la naturaleza o una tautología inferencial, la psicogénesis de las explicaciones causales parece mostrar, por el contrario, que éstas tratan sobre las transformaciones de los objetos, tanto como sobre las transformaciones de las transmisiones o conservaciones, en tanto que las operaciones del sujeto que interviene en el juego de las inferencias son, en sí mismos, de naturaleza transformadora y conservadora: así resulta una convergencia progresiva entre las operaciones y la causalidad, si bien las primeras dependen del sujeto y la segunda del objeto; aquélla aparece, a su vez, como un sistema de operaciones, pero atribuida a los sujetos, es decir, situada en lo real y tendiente a expresar lo que producen esos objetos cuando actúan los unos sobre los otros y se comportan como operadores.

Ahora bien, siendo así, vemos aparecer un nuevo problema: a partir del hecho de que el sujeto constituye en sí mismo, en sus acciones y en su organismo, una fuente de causalidad en relación con el conjunto de lo real, ¿deberíamos sacar en conclusión que sus propias operaciones derivan de esta causalidad o que las estructuras operatorias, en tanto productos de las coordinaciones generales de la acción, constituyen, bajo sus formas lógico-matemáticas, la forma necesaria de todo conocimiento, incluyendo el de las relaciones causales? En otros términos, ¿la noción de la atribución de las operaciones a los objetos, debe ser interpretada como un modelo realista o apriorístico? Siendo lo específico de los estudios genéticos reencontrar en el desarrollo mismo continuos procesos dialécticos, podríamos estar tentados de responder de modo inmediato: ni lo uno ni lo otro, o los dos a la vez, o inclusive alternativamente, según una marcha en espiral. Pero nuestro método consiste en desconfiar de las especulaciones y recurrir a los hechos, así que, en el presente ensayo, nos daremos por satisfechos formulando, en cada etapa, los datos experimentales que mejor permitan ajustarse a la cuestión. En cuanto a la continuación de las investigaciones, es obvio que los elementos de una respuesta positiva pueden encontrarse

en el terreno de la propia acción y de sus dos dimensiones: causal y operatoria. Es por esta vía que encaminamos la tarea del presente año de trabajo.

A la espera de estos nuevos resultados, el presente ensayo comprende dos partes. En el curso de la primera, que conforma lo esencial del volumen, son resumidos los principales datos obtenidos por las investigaciones ya concluidas, cuyo detalle será posteriormente publicado; pero será presentado dentro de una perspectiva general de las relaciones entre la causalidad y las operaciones, ya que tal parece ser la cuestión central que provocan las explicaciones causales. En la segunda parte, se encontrará un trabajo redactado por R. García y el suscripto; se trata de una discusión del problema de las relaciones entre la geometría y la dinámica, tal como se plantea en la física moderna y, de una forma renovada, en la física contemporánea, constituyendo todo, a partir de los estadios elementales de la psicogénesis, un aspecto esencial de las cuestiones generales de la causalidad.

Finalmente, es conveniente proporcionar dos clases de indicaciones para la lectura de las páginas siguientes. En primer lugar no daremos, al hacer citas, el título de cada investigación (R) ni el nombre de los colaboradores correspondientes: se encontrará la lista completa en la bibliografía que se detalla al final del presente trabajo, y las remisiones se harán, simplemente, mediante los signos R 1 o R 2, etc.

En segundo lugar, cada hecho mencionado será relacionado con alguno de los estadios observados en el curso del desarrollo de la causalidad. Ahora bien, esos estadios corresponden, de manera muy general, a los de las operaciones. La serie es la siguiente:

Nivel	I A (4-5 años)	Reacciones pre-operatorias anteriores a la formación de las funciones constituyentes (vol. XXII de los *Estudios*).
—	I B (5 1/2-6 años)	Comienzo de objetivación y funciones constituyentes.

—	II A (7-8 años)	Formación de operaciones concretas (clases, relaciones, números y espacios) y de las primeras conservaciones; transitividad.
—	II B (9-10 años)	Consumación de las operaciones concretas, conservación del peso en los cambios de forma del objeto; coordenadas naturales del espacio.
—	III A (11-12 años)	Operaciones p r o p o sicionales, combinatoria, grupo de dos reversibilidades, coordinación posible de dos sistemas de referencias, etc.
—	III B (12-15 años)	Equilibración y generalización de las reacciones III A.

Finalmente, agradezco profundamente a los numerosos colaboradores del Centro, cuyos nombres se encuentran en la enumeración de las cien investigaciones utilizadas y resumidas en esta Introducción, lo mismo que a mis colegas F. Halbwachs, J. B. Grize, P. Gréco y R. García, que han tenido a bien leer este manuscrito y cuyos consejos y datos complementarios me han sido preciosos.

J. PIAGET

PRIMERA PARTE

CAUSALIDAD Y OPERACIONES

por JEAN PIAGET

Explicar un efecto por un conjunto de condiciones consideradas como causales equivale a mostrar, por un lado, cuáles son las transformaciones que lo han producido y, por el otro, cómo la novedad del resultado corresponde a ciertas transmisiones a partir de los estados iniciales: este doble aspecto de producción y de conservación caracteriza tanto las transformaciones operatorias como las causales y, en ambos casos, se reconoce por el hecho de que la construcción en juego aparece como necesaria. De manera general y desde el punto de vista de su interpretación genética, las operaciones equivalen a transformar lo real y corresponden, así, a lo que el sujeto puede hacer de los objetos en sus manipulaciones deductivas o deductibles (es decir, primeramente materiales, pero susceptibles de una depuración formal progresiva), en tanto que la causalidad expresa lo que hacen los objetos al actuar los unos sobre los otros y sobre el sujeto: sería inconcebible, por lo tanto, que no existiera una relación íntima entre estas dos formas de acción; de no ser así, las construcciones lógico-matemáticas del sujeto no encontrarían jamás lo real mientras que éste modificaría a aquélla sin saberlo.

§ 1 / LA POSIBLE PRIMACIA DE LAS OPERACIONES

Ahora se trata de elegir entre tres formas de relación posibles. Según la primera, las operaciones lógico-matemáticas del sujeto se desarrollarían de manera autónoma por abstracciones reflejas a partir de coordinaciones generales de sus acciones y, en la medida del progreso de esta construcción endógena, los instrumentos operatorios nuevamente elaborados, nivel a nivel, serían, cada vez, atribuidos a los objetos, lo que conduciría a la formación de nuevos modos de explicación, y de ahí a nuevas estructuras causales. En la medida en que hemos comenzado por estudiar las operaciones del sujeto, descuidando más o menos el detalle de los problemas de la causalidad, las cosas también pueden presentarse de la siguiente manera: por ejemplo, al nivel en que el niño llega a ser apto para la transitividad operatoria, lo es también para las nociones de transmisión mediata del movimiento; en tanto llega a coordinar dos sistemas de referencia, adquiere al mismo tiempo el poder de dominar ciertos problemas vectoriales, etc. En una palabra, en esta primera perspectiva, las operaciones se desarrollarían por sus propios medios, y la causalidad no constituiría más que una suerte de réplica o de serie de réplicas sucesivas de las estructuras operatorias gradualmente adquiridas. En este caso, la noción de una atribución de las operaciones al objeto adquiriría una significación semejante a un cierto apriorismo, por cierto genético o evolutivo y no estático, pero insistiendo más en el papel del sujeto que en el de los objetos.

Una interpretación tal, solamente promueve dos tipos de objeciones: unas desde el punto de vista de la causalidad y las otras desde el de las operaciones en sí mismas. Comenzando por estas últimas es, en efecto, evidente que cuanto más elementales son y *a fortiori* tanto más se remonta uno en la dirección de sus raíces pre-operatorias (funciones, etc.), y son menos disociadas de su materia, que pertenece al objeto e, indirectamente, a la causalidad. Por ejemplo, la gran diferencia

que opone las operaciones «concretas» entre los 7 y 11 años a las operaciones formales o proposicionales ulteriores es que se apoyan directamente sobre los objetos y así permanecen, en parte, solidarias de sus contenidos: de ahí las diferencias, como en el caso de las conservaciones, seriaciones, transitividades, etc., sólo se aplican a los pesos con un atraso de uno o dos años en relación a las cantidades simples. Ahora bien, estas resistencias del contenido a la forma (y, en otros casos, las simplificaciones debidas a los contenidos fáciles de estructurar operatoriamente) no deben ser separadas de los factores de causalidad: parece evidente, en efecto, en el ejemplo del peso, que las dificultades de interpretación dinámica presentadas por esta noción juegan un importante rol en el retardo de su estructuración operatoria, en razón de las contradicciones que se intenta superar entre las exigencias de aquélla y la diversidad de situaciones causales objetivas. Se puede decir otro tanto del volumen, cuya logicisación tardía parece relacionada con los problemas geométricos del continuo interno (conjunto de las partes), pero también, en lo que se refiere al volumen de los cuerpos, a los modelos físicos corpusculares, sobrepasando estos dos tipos de consideraciones el dominio de las operaciones concretas.

De manera general, éstas últimas se presentan bajo dos formas de grupo, isomorfas aunque distintas, cuyos desarrollos psicogenéticos respectivos son estrechamente solidarios: las operaciones lógicas que tratan sobre los objetos discontinuos en función de sus semejanzas y diferencias, y las operaciones infra-lógicas que tratan sobre el continuo espacial en función de las cercanías y separaciones. Ahora bien, el espacio es uno de los dominios de unión más estrecha entre el sujeto y los objetos, por su doble naturaleza lógico-matemática y física, desempeñando las operaciones espaciales un papel fundamental en el desarrollo de la causalidad. Es, por lo tanto, muy verosímil que aquélla intervenga conjuntamente en la evolución de las operaciones.

En lo que atañe a las estructuras pre-operatorias, recordemos que están caracterizadas por una indiferenciación entre

lo espacial y lo lógico-aritmético (por oposición con las diferenciaciones y coordinaciones propias de las operaciones concretas): las colecciones figurales, los números figurales, etc., con sus ejemplos, y esas formas prelógicas de clasificación, etc., están muy estrechamente ligadas a un contenido causal o precausal (definiciones por el uso, colecciones figurales a base de uniones funcionales, etc.). Por otro lado, las funciones constituyentes que se elaboran a los mismos niveles y representan la semi-lógica perteneciente a sus estructuras, expresan tanto dependencias físicas que conducen a la causalidad como dependencias nocionales que conducen a las operaciones del sujeto. Inútil recordar que, en definitiva, tanto éstas como aquélla tienen sus raíces en la acción misma, en sus componentes sensorio-motrices fundamentales. Ciertamente, las operaciones del sujeto extraen su sustancia de las coordinaciones generales, mientras que la causalidad toma una parte de sus informaciones de las acciones particulares, pero está claro que entre éstas y aquéllas existen lazos estrechos y que su diferenciación es muy gradual.

Por todas estas razones es, en consecuencia, muy dudoso que el desarrollo de las operaciones sea independiente del de la causalidad y le determine un sentido único de recorrido. Recíprocamente, la hipótesis de una subordinación simple de lo causal a lo operatorio encuentra dificultades considerables desde el punto de vista de la causalidad misma. Por cierto, hay una convergencia notable entre los estadios de formación de las operaciones y los de la explicación causal y, por cierto, el sujeto no comprende los fenómenos más que atribuyendo a los objetos acciones y luego operaciones más o menos isomorfas a las suyas. Pero esto no significa que esas operaciones se formen independientemente de la causalidad. Desde el punto de vista de ésta última el problema puede centrarse de la siguiente manera: ¿por qué ciertas formas de explicación parecen más simples que otras y las preceden en la historia y en el desarrollo individual? Por ejemplo, las nociones de empuje o arrastre mecánico parecen más elementales que las de calor o de campo electromagnético, aunque en

lo real las primeras no corresponden a mayor número de fenómenos. Decir que son más primitivas porque corresponden a operaciones más simples no hace más que desplazar el problema, ya que falta explicar por qué nos parece así. Decir que estas operaciones, como estas explicaciones mecánicas, son juzgadas como simples en la medida en que ambas provienen de acciones o de sus coordinaciones impuestas desde los comienzos del desarrollo por la estructura de nuestro organismo nos sitúa, por el contrario, sobre la pista, pero muestra inmediatamente cuánto más complejas son que una filiación de sentido único las relaciones entre los esquemas que conducen a las operaciones y los que desde el comienzo presentan una significación causal.

En efecto, es preciso notar que, en la medida que uno cree poder derivar las operaciones de ciertos aspectos caracterizando las acciones materiales anteriores, se sitúa repentinamente sobre un terreno causal: reunir los objetos en colecciones que prefiguran clases u ordenarlos de manera que prefiguren series o colocarlos en correspondencia según diversos ordenamientos, siempre equivale (antes que tales acciones sean interiorizadas en operaciones puramente mentales y deductivas) a actuar sobre los objetos, a desplazarlos, a impulsarlos, a situarlos en posiciones estables, etc. Es así como, desde el comienzo, hay todo un contexto causal en cuyo seno se constituyen las operaciones y, si es fácil hacer abstracción de este dinamismo, las velocidades, las duraciones y aún las configuraciones espaciales para conducir a formas extra-temporales y extra-físicas (pero no metafísicas como, por ejemplo, el infinito aritmético), no hay que olvidar, sin embargo, que la independencia de lo operatorio en relación con lo causal es un producto de depuración y no una primera noción. Y puesto que, finalmente, las mismas operaciones servirán al sujeto para explicarse el movimiento transitivo, las transmisiones cinemáticas y dinámicas, etc., se puede hablar, por cierto, de una «atribución» de esas operaciones a los objetos, pero a condición de no olvidar que, durante su formación, el sujeto mismo ha sido, por su organismo, un objeto entre otros, so-

metido a toda clase de dependencias y de interacciones físicas en el detalle de las acciones por cuyo intermedio ha manipulado o transformado los objetos; y, más aún, no hay que olvidar que el sujeto, por joven que sea, toma consciencia de estas ayudas o resistencias de lo real al mismo tiempo que de sus poderes sobre los objetos, de manera que, para él como para el observador que sigue su desarrollo, la causalidad es tan primitiva como los esquemas formadores de las futuras operaciones.

En una palabra, subordinar sin más la causalidad a las operaciones plantea dificultades tanto desde el punto de vista de la causalidad misma como del de las operaciones.

§ 2 / LA PRIMACIA DE LA CAUSALIDAD

Examinemos ahora la hipótesis inversa: la causalidad precederá a la operación o a las acciones pre-operatorias, y el desarrollo de esas operaciones constituirá un reflejo interiorizado, y luego formalizado, de nociones causales sucesivamente impuestas al sujeto por lo real. A decir verdad e independientemente de las tendencias generales de la epistemología empirista, a una interpretación semejante no le faltan argumentos, comenzando por el más general: si las operaciones nacen de acciones y consisten, como ellas, en transformar lo real, parece obvio que el sujeto se va a esforzar en modificarlo materialmente y, en consecuencia, causalmente, antes que permitirse el lujo de transformarlo formalmente enriqueciendo las clasificaciones, series, numeraciones o medidas, etc. En una palabra, podría sostenerse que, antes de estructurar los objetos, el sujeto intentará utilizarlos y ulteriormente modificarlos en vista de los efectos o de los aciertos físicos, lo que implica un conjunto indefinido de interacciones causales. En tal perspectiva, cada progreso operatorio nacerá de una necesidad de comprensión inicialmente provocada por un problema causal, que trata sin más de «explicar» o, con tal fin, eliminar, en primer lugar, cierto número de contradicciones reales o apa-

rentes. En este sentido podrían ser interpretados un conjunto de ejemplos. Si bien es necesario esperar hasta los 9 años para que se constituya la conservación de las longitudes, la construcción de los sistemas de coordenadas, etc., sin insistir en la conservación del peso, no está excluido, de ningún modo, que estos progresos operatorios estén relacionados estrechamente con las notables transformaciones que se producen a esta edad en las explicaciones dinámicas del niño[1]: mientras que hasta ese momento los movimientos y las velocidades (impulsos, etc.) son, en sí mismos, fuerzas, se asiste a una diferenciación de la cinemática y del juegó de fuerzas, que impone nuevas precisiones en lo que atañe a los caminos recorridos, a las posiciones y orientaciones en el espacio, etc. El peso desempeña ahora, entre otros, un nuevo papel y la horizontalidad del agua (caso particular de aplicación de coordenadas naturales) es, a la vez, descubierta geométricamente y explicada causalmente por el peso del líquido (hasta ese momento juzgado ligero) y su tendencia a descender. En resumen, un gran número de hechos puede ser invocado en favor del papel de la causalidad en la conquista de la estructuración operatoria.

Pero al presentar así las cosas, uno tropieza con dificultades tan grandes como las de la hipótesis precedente. La principal dificultad sería que, al tratar de considerar el desarrollo de las explicaciones causales como anterior al de las operaciones o como independiente de ellas, sería necesario interpretar la causalidad como determinada por la experiencia de los objetos, o por las propias acciones, pero en tanto experiencias físicas particulares en el seno de las interacciones entre el organismo y los objetos: en efecto, recurrir a las coordinaciones generales de la acción sería apelar a las estructuras formadoras de las futuras operaciones, puesto que reunir las acciones, encuadrarlas, ordenarlas, ponerlas en correspondencia, etc., ya implica una estructuración pre-lógica o pre-matemática. En una palabra, explicar la causalidad independientemente de las operaciones nos llevaría a considerar a las rela-

1. Véase el final del § 8.

ciones causales como nociones directamente observables en la experiencia inmediata de los objetos o de las acciones, pudiendo ser extraída de éstos por abstracción simple o física (en oposición con la abstracción refleja o lógico-matemática), sin recurrir a una construcción o a una composición.

Ahora bien, Hume demostró definitivamente que, ateniéndose a este método de simple lectura empírica haciendo abstracción de los objetos, no se llega a la causalidad, sino a puras sucesiones regulares o leyes. Es cierto que Michotte mostró posteriormente la existencia de una percepción de la causalidad cuya validez todos podemos controlar, pero nosotros hemos intentado precisar, de inmediato, dos puntos esenciales para nuestra actual discusión. El primero es que esta percepción actúa sobre la resultante de una composición: según reconoció Michotte, no se ve pasar nada del móvil activo *A* al móvil pasivo *B,* pero se percibe un «efecto» dependiente de las velocidades, las duraciones y desplazamientos; agregaremos entonces que esta impresión de producción resulta de una composición elemental según la cual, en el curso de la transformación, lo que ha ganado *B* corresponde a lo que ha perdido *A.* Si todavía no hay operaciones, al menos hay construcción pre-operatoria mediante regulaciones perceptivas o sensorio motrices, y no percepción de una transmisión actual: se percibe que «algo ha pasado» y no qué cosa «pasa» de *A* a *B,* lo que es muy distinto. En segundo lugar las impresiones perceptivas serían inexplicables si no proviniesen de una traducción en términos de índices visuales, de percepciones táctilo-cinéticas ligadas a la acción sensorio-motriz misma en su conjunto. Esto nos remite a la acción.

En efecto, en el nivel sensorio-motor asistimos a la formación de una causalidad ligada a las acciones de desplazamiento, impulso, extracción, balanceo, etc., en las que puede verse todo un desarrollo anterior al de las operaciones. Pero todo el problema es, nuevamente, establecer si existe ahí el producto de simples constataciones, como si la relación causal fuera observada a la manera de un desplazamiento o de un cambio de luz, o si ya se trata de construcciones o composi-

ciones. Ahora bien, todo el desarrollo de la causalidad sensorio-motriz, en el sentido de la objetivación y la espacialización, señala que es solidaria con las construcciones del objeto del espacio y del tiempo o, dicho de otra manera, de la inteligencia global. Por otro lado, desde las primeras conductas causales de empujar o tirar, etc., estas acciones ya constituyen productos de composición a partir de la aprehensión y de las relaciones espaciales. Baste decir que en toda causalidad sensorio-motriz está en ejecución el sistema de esquemas de la inteligencia y sus coordinaciones generales, primeras formas de lo que constituirá, más tarde, las operaciones.

§ 3 / LA INTERACCION ENTRE LAS COMPOSICIONES OPERATORIAS Y LA CAUSALIDAD

Nuestra hipótesis será, entonces, que a todos los niveles la elaboración de la causalidad se interacciona con las de las operaciones, lo que equivale a decir que estos dos desarrollos se favorecen mutuamente (como consecuencia de conflictos y de convergencias) sin que pueda hablarse jamás de una acción con sentido único, sino sólo en ocasiones particulares, momentáneas y con alternancias. Pero, entonces, se plantea una serie de problemas y aquí no hacemos más que enunciarlos puesto que ellos serán objeto de discusiones ulteriores.

La primera de estas cuestiones es la de la diferenciación progresiva de los dos sistemas presentes. Aun cuando el sujeto verifique la conmutatividad de una suma numérica, cada uno estará conforme en ver en este comportamiento una operación no causal, en tanto que si intenta comprender por qué dos péndulos que oscilan, al ser enfrentados, permutan sus posiciones iniciales, se puede hablar de causalidad. Pero si la primera de estas operaciones ya no es ejecutada simbólica o deductivamente, y el sujeto necesita manipular los objetos para controlar o inclusive comprender el carácter conmutativo, por ejemplo de $2+3=3+2$, las acciones son, al mismo tiempo,

operatorias (o pre-operatorias) y causales, puesto que desplaza los objetos y ya que, entre sus manos y esos objetos, interviene un proceso de naturaleza dinámica. Sin embargo, la intención del sujeto no es efectuar el análisis y puede descuidar este aspecto mecánico para centrarse en el problema de la conmutatividad, tanto más cuanto en la especie la acción causal de desplazar los objetos ha devenido familiar y su explicación no tendrá influencia sobre la comprensión de la relación conmutativa. Por el contrario, al nivel sensorio-motor en que el bebé hace experiencias sobre los desplazamientos de objetos, podrá intentar modificar *AB* en *BA*, pero todo su esfuerzo se concentrará, entonces, sobre los movimientos necesarios para ese cambio de posición: el acento estará puesto, en consecuencia, sobre el problema causal, lo que no le impedirá reconocer que siempre se trata de los mismos objetos *A* y *B*, y ése es un comienzo de conmutatividad.

Así podemos suponer, puesto que la causalidad procede de la propia acción antes de ser generalizada a las relaciones entre objetos, y puesto que las operaciones, por su lado, derivan de las acciones y de sus coordinaciones, que, cuanto más lejos se remonte en el tiempo, tanto más indiferenciadas serán las acciones del sujeto, y, en consecuencia, simultáneamente pre-operatorias y causales, mientras que con el progreso de las operaciones habrá, a la vez, diferenciación y colaboración en un sentido que habrá que descubrir. Pero la cuestión previa, dadas estas interacciones de continuidad, es la de precisar los criterios de los que nos serviremos:

a) Las operaciones lógico-algebraicas del sujeto consisten en transformar los objetos concretos o abstractos enriqueciéndolos con formas nuevas (clases, orden, correspondencias o morfismos, etc.), cuya producción procede por abstracciones reflejas a partir de operaciones de rango inferior o de las coordinaciones generales de la acción.

b) Las operaciones geométricas proceden de la misma manera, pero por construcción de formas que, por otra parte, pueden ya pertenecer al objeto (espacio físico), de donde la posibilidad de abstracciones reflejas que permiten la produc-

ción de nuevas formas (pudiendo a un nivel superior sobrepasar lo real) y de abstracciones «simples» o físicas (a partir de estructuras espacio-temporales de los objetos).

c) Los hechos y las leyes (a partir de las relaciones susceptibles de ser repetidas) tratan sobre las propiedades observables de los objetos y sus variaciones, que se descubren unos y otros por abstracción simple (a partir de los objetos). Por el contrario, la misma lectura de estos hechos ya supone la utilización de instrumentos de asimilación (clases, relaciones, medidas, etc.) cuya formación depende de la abstracción refleja. Esto es *a fortiori* del mismo modo que cuando las variaciones aisladas son reunidas en co-variaciones o dependencias funcionales, siendo la función $y=f(x)$ una «aplicación» que también supone una actividad coordinadora del sujeto, inclusive si las variaciones de x y de y son descubiertas por abstracción física o simple.

d) La causalidad consiste en un sistema de transformaciones no observables directamente, que rinden cuenta de las variaciones *c*) por un proceso deductivo análogo a la construcción operatoria *a*), pero que llega a la construcción de un modelo atribuido a los objetos. La causalidad comporta, así, como las construcciones geométricas y las funciones, una mezcla de abstracción simple que proporciona datos y las abstracciones reflejas intervinientes en la elaboración del modelo.

e) Las acciones causales del sujeto sobre los objetos, o aquéllas que ocurren en el sujeto, no dan lugar a intuiciones directas, sino deformantes: sólo son conocidas gracias a regulaciones activas que proporcionan el conocimiento de co-variaciones en función de los resultados observados sobre los objetos[1] y exigen así una elaboración deductiva análiga a *d*). Estas acciones causales son, por lo tanto, cognoscibles por analogía con la causalidad entre objetos, del mismo modo que ésta lo es por analogía con las operaciones del sujeto.

1. Por ejemplo: la regulación de las acciones de impulso y de conductas instrumentales, en oposición a la visión donde sólo la dirección de la mirada está activamente regulada (las acomodaciones fisiológicas permanecen inconscientes).

Dicho esto, quedan por hacer dos distinciones esenciales. En lo que concierne a las operaciones *a*) se puede hablar de operaciones particulares, en el caso, por ejemplo, de una reunión de clases ($A+A'=B$) o de una disociación ($B-A'=A$), etc. Pero también es necesario considerar las transformaciones de una operación en otra, como la inversión, la reciprocidad, o la correlatividad en el grupo *INRC*, comprendiendo igualmente en esta categoría las formas generales de composición, como la transitividad, la asociatividad o la distributividad.

En segundo lugar, cuando para descubrir los hechos y las leyes *c*, el sujeto tiene necesidad de operaciones como instrumentos de lectura y de estructuración, hablaremos de operaciones «aplicadas al objeto»; ellas no sólo comprenden las relaciones elementales o las medidas, sino también el inmenso conjunto de funciones de que se sirve el físico para expresar las leyes de su campo de estudio. Por el contrario, para la construcción de un modelo causal, a partir de formas cualitativas de transmisión, comprendidas por el niño hasta las estructuras de grupos, y de operadores utilizados por el físico, las operaciones en juego devienen explicativas sólo cuando pueden ser «atribuidas» a los objetos, ya que se trata de comprender cómo actúan en este contexto. Ahora bien, en lo que sigue veremos que las operaciones atribuidas consisten menos en operaciones particulares que en transformaciones de operaciones con sentido recordado en lo inmediato, es decir, en formas generales de composición operativa [1]. Es, por lo tanto, respecto de éstas que debemos establecer si los progresos operatorios actúan en sentido único sobre los de la causalidad o si hay interacción, y de qué manera.

1. Dicho de otro modo, para evitar todo equívoco, precisamos que al atribuir una transformación operatoria a los objetos, el sujeto está obligado a aplicarla a su propio uso: por lo tanto no hay nada de contradictorio en que sea, simultáneamente, aplicada y atribuida.

§ 4 / TRANSMISIONES MEDIATAS Y TRANSITIVIDAD

Uno de los casos más corrientes de convergencia entre una forma general de composición operatoria y un proceso invocado en la explicación causal es el de la transmisión mediata semi-interna de los movimientos, etc., que se elabora hacia los 7-8 años al nivel en que comienza, además, la transitividad operatoria. Esta constituye, en efecto, una de las condiciones necesarias de la construcción de grupos de operaciones concretas: las equivalencias (relaciones simétricas), las seriaciones, los encuadramientos de clases y las correspondencias suponen esta transitividad, instrumento indispensable de las inferencias mediatas. Ahora bien, en la misma época, vemos aparecer en el terreno causal un modo general de composición de naturaleza análoga.

Desde los comienzos sensorio-motores de la causalidad, el sujeto descubre, ciertamente, transmisiones de todo tipo, puesto que la relación causal más simple entre un agente y un paciente supone la transmisión de algo (movimiento o fuerza, etc.): desde que se ejercita en desplazar, impulsar o tirar un objeto, el bebé aprende a conocer tales transmisiones. Son éstas las que reencontramos en los hechos de la R 1 donde se intenta examinar cómo los sujetos jóvenes consideran a la resistencia cuando una bola activa *A* en una pendiente pone en movimiento a una bola pasiva *B* (o un vagón) cuyo peso varía. Ahora bien, desde los 5 1/2 años la mitad de los sujetos (y, en algunos casos, desde los cuatro años) esperan que un aumento del peso de *B* disminuirá el efecto del impulso, mientras que, para los otros, lo favorecerá.

Pero es necesario esperar hasta los 7-8 años para que a estas transmisiones inmediatas se añada la noción de una transmisión mediata, es decir, a través de los objetos mediadores inmóviles y se trata de comprender bajo efecto de qué factores. La R 2 se ha ocupado de los intermediarios formados por una hilera de bolitas, la última de las cuales parte sola después que la primera ha sido chocada por una bolita activa. A un nivel I A (4-5 años) se ha controlado la acción a distancia (sin que el intermediario juegue un rol) o el pasaje por detrás de las otras para impulsar a la últi-

ma (o, inclusive, sustituirla). Al nivel I B (6 años), el pasaje del movimiento es concebido como un encadenamiento de transmisiones inmediatas: la primera tocada impulsa a la segunda, etc., con movimiento general y sin que nada atraviese las bolitas. En el estadio II, por el contrario, hay transmisión mediata, pero en forma semi-interna (el esfuerzo, etc., pasa a través de las bolas) y semi-externa (éstas avanzan, sin embargo, muy poco). Sólo en el estadio III la transmisión mediata deviene puramente interna, es decir, sin transmisión molar (pero con sacudida interna, «vibraciones», etc.).

La R 3 ha verificado estos resultados utilizando como intermediarios objetos manifiestamente inmóviles: un vaso invertido que se hunde manualmente en un musgo artificial, dos monedas sobre las cuales se apoyan dos dedos, etc.: a pesar de estas precauciones, los sujetos del estadio II siguen creyendo en pequeños desplazamientos, sin lo cual la transmisión les parecerá imposible, y nuevamente hay que esperar al estadio III para una mediación puramente interna.

La R 4 se ha ocupado de las transmisiones de sentidos contrarios (una bolita activa choca a la serie de bolitas inmóviles en cada extremo). Al nivel I A apenas se obtiene alguna explicación, pero en I B los activos opuestos se rechazan por intermediación de los pasivos a continuación de los choques contrarios y simultáneos. Al nivel II A domina la misma idea, pero con pasaje semi-interno. En el nivel II B existe previsión, sea de una detención total, sea de una transmisión hasta la del medio, que reenvía entonces los esfuerzos a ambos costados. Finalmente, en el estadio III, las dos corrientes se cruzan y si hay tres bolitas activas a la derecha y una a la izquierda, entonces tres bolitas pasivas partirán hacia la izquierda y una hacia la derecha. Vemos, por lo tanto, que hay transmisión semi-interna desde el nivel II A e interna en el nivel III.

La R 5 muestra una estrecha relación entre los resultados de la R 2 y las direcciones seguidas por las bolitas ubicadas ya sea en una serie única, ya sea colocando algunas lateralmente en distintas posiciones. En el estado I el sujeto prevé las partidas en todas las direcciones, incluso hacia atrás o perpendiculares a la hilera. En el estadio II se prevén las oblicuas y las perpendiculares son rápidamente eliminadas. En el estadio III las previsiones son correctas.

La R 6 opone un movimiento por transmisión a un movi-

miento inerte de dos bolas apoyadas sobre los dos cortados de un ángulo sometido a una rotación por choque. Volveremos (en § 15) sobre el movimiento inerte. La transmisión es comprendida desde el nivel II A, pero sin detallar primero el rol del borde vertical del ángulo, como ocurre en el estadio III.

Para los engranajes de P. Gréco (I 7) se admite una acción por contacto (transmisión inmediata) desde el estadio I, pero es necesario esperar al nivel II A para un engranaje continuo, al nivel II B, para que las inversiones de sentido sean anticipadas con comprensión y al estadio III para las cuestiones de bloqueo y desbloqueo. Las ruedas unidas por una cuerda (R 8) dan resultados análogos: ninguna comprensión del rol del hilo en el estadio I, transmisión por el hilo al nivel II A, pero sin que los caminos recorridos por dos señales en el hilo o en una misma rueda sean tomados en cuenta. Ellos adquieren esta equivalencia, incluso «necesariamente», al nivel II B, pero la cuerda no es todavía sede de una fuerza, lo que deviene en el estadio III. A propósito de los caminos recorridos, citamos además la R 9, donde el hilo no hace girar a las ruedas pero arrastra dos perlas a las que está fijo a lo largo de un trayecto de forma cuadrada. En esta situación, simplificada al máximo, no hay, sin embargo, transmisión por el hilo al nivel I A, sino acción a distancia de una perla sobre la otra. Al nivel I B el hilo es necesario, pero si uno propone cortarlo en tal o cual punto, el sujeto prevé muy mal las consecuencias. Al nivel II A la transmisión mediata es obvia y el sujeto prevé incluso las direcciones para un modelo cruzado (hilo en diagonal ▷◁) pero (como en la R 8), no llega sino muy trabajosamente a la igualdad de los trayectos recorridos por las dos perlas, desplazadas, sin embargo, simultáneamente. En el nivel II B esta equivalencia se vuelve necesaria pero, si el sujeto prevé naturalmente bien los efectos de las secciones del hilo sobre la transmisión, todavía hay fluctuaciones respecto de lo que el hilo produce sobre el segmento comprendido entre la sección y la perla más próxima. Esta última dificultad se percibe en el estadio III.

El sincronismo entre los comienzos de la transmisión propiamente mediata y la de la transitividad operatoria (7-8 años) se reencuentra en otros dominios, aunque con pequeña variaciones, es decir, ligeras diferencias posibles según la naturaleza de lo que es transmitido. Para el sonido o las vibraciones entre dos diapasones apoyados sobre una mesa (R 10), las transmisiones del estadio I

son inmediatas y a distancia, en tanto que en II A hay comienzo de transmisión mediata, pero sigue siendo externa: el sonido circula sobre la mesa o por un hilo imaginario, etc., y no a través de la madera. En el nivel II B es una «corriente» que atraviesa la madera o el aire, y en el estadio III una vibración del aire mismo, por otra parte inmóvil y que ya no transporta el sonido por traslación. La R 11 consideró los imanes y sus polos, y en particular una suspensión de cinco bolas de metal que se retienen entre sí en vertical a partir de un imán. Se revela una oposición neta entre el estadio I, donde la fuerza del imán depende de una «cola» que tiene todos los poderes, incluso el de «soplar» para producir repulsiones, y el estadio II, desde los 7 años, donde la fuerza del imán «atraviesa» las bolas que están suspendidas de él. Debe notarse que en el estadio III el juego de los polos se explica por las desigualdades de fuerzas: dos fuerzas iguales, fuertes o débiles, se rechazan, aumentando así las distancias, sea $(+)\times(+)=(-)\times(-)=(+)$, y dos fuerzas desiguales se complementan, atrayéndose de esta manera y disminuyendo las distancias, sea $(+)\times(-)=(-)\times(+)=(-)$, lo que es semejante a la regla de los signos. Por el contrario, en lo que respecta a la transmisión por el agua de un tubo en U, a propósito del cual se pregunta qué ocurre con la última gota vertida (R 12), los sujetos del nivel II A piensan, como en I B, que esta gota atravesará todo el líquido, en tanto que el empuje entre una capa de agua y otra sólo se adquiere en el nivel II B.

A propósito de las relaciones entre la transmisión mediata y la transitividad, citaremos otras dos suertes de hechos. En primer lugar, en caso de no-transmisiones, es decir, de bloqueos de la caja de Vergnaud (R 13, donde se trata de retirar sucesivamente una o dos barras para que ya no retengan a las que se desea sacar), se encuentra un sincronismo neto entre la aparición de esas transmisiones negativas (retenciones) en su orden de sucesión, y la transitividad operatoria de los comienzos del estadio II. La R 14 se ha ocupado de las relaciones entre ésta y un traspaso de materias y no de movimientos: dos vasos llenos hasta las tres cuartas partes, de formas muy diferentes, *A* y *C*, se muestran al niño, lo mismo que un vaso vacío *B* que puede servir de intermediario, pero del que no decimos, naturalmente, nada; después de un examen de la situación, se oculta todo detrás de una pantalla y luego se retira ésta, preguntando qué es lo que ha pasado, estando el

líquido rojo de *A* en *C* y el líquido verde de *C* en *A*. En el nivel I A los sujetos suponen un cruzamiento directo y se disponen a verter (simultánea o sucesivamente) *A* en *C* y *C* en *A* con los propios vasos del experimento, sin pasar por *B*. Al nivel I B harán lo mismo, pero en el momento de ensayarlo, el sujeto percibe la imposibilidad. Desde los comienzos del estadio II, por el contrario, el rol necesario del vaso *B* está comprendido.

La semejanza que revelan estos múltiples hechos entre la transitividad operatoria y la transmisión mediata (en particular bajo sus formas semi-internas) parece, entonces, evidente, pero exceptuando tres diferencias. La primera, es que en una inferencia tal que $A=B$, $B=C$, por lo tanto, $A=C$, se parte de relaciones de vecindad para reconstituir la relación a distancia ($A=C$), en tanto que ordinariamente, en la transmisión, el sujeto comprueba un efecto en el extremo de una serie y reconstituye lo que ha pasado de uno en uno a partir del otro extremo. Pero esto no quita nada a la unidad de la composición operatoria. En segundo lugar, y esto es lo esencial, la transitividad operatoria transmite una simple forma (equivalencia o diferencia orientada, etc.), en tanto que la transmisión causal mediata trata sobre el pasaje de un movimiento, de una fuerza, etc., es decir, de un contenido relativo al objeto. Esta segunda diferencia tiene por consecuencia una tercera: en el caso de la transitividad lógica las relaciones iniciales tales como $A=B$ y $B=C$ se conservan cuando el sujeto extrae la relación final $A=C$, mientras que la transmisión material movimiento, etc., que ha pasado de *A* a *C* es ganada por *C* pero perdida por *A*, puesto que se trata de la transmisión de un elemento que se conserva en el curso de una sucesión temporal y no de una forma intemporal. ¿Habrá que pensar, entonces, que es la transmisión lógica o formal la que provoca genéticamente el descubrimiento de la transmisión material, o a la inversa, o que hay interacción?

La transitividad operatoria, o transmisión de naturaleza formal [1], no se constituye, ciertamente, *ex nihilo*. Mucho an-

1. En el sentido de las formas opuestas a los contenidos (=transmi-

tes que ésta se imponga y se generalice, el sujeto puede descubrir ciertos aspectos, aunque no sea más que perceptivamente cuando los tres elementos $A=B=C$ han sido vistos simultáneamente, antes de ser comparados por pares AB y BC sin AC. Además no se generaliza sino progresivamente, puesto que la transitividad de los pesos (a igual volumen) no aparece hasta alrededor de los 9-10 años. Lo que es nuevo a los 7-8 años en las primeras composiciones transitivas que se imponen, entonces, es el sentimiento de necesidad lógica que las caracteriza, y esta necesidad no puede provenir más que de un factor general: el cierre del sistema (la seriación) hasta ese momento inconcluso, pero que, una vez cerrado sobre sí mismo por su método recurrencial de construcción, comporta leyes de composición inherentes al sistema como tal y adquiere, de este modo, un carácter de necesidad interna. Se puede, en consecuencia, distinguir en la constitución de la transitividad operatoria dos procesos de naturaleza diferente: la estructuración formal ajustada a las leyes del sistema, y cierta función de coherencia o de encadenamiento consistente en una exigencia de unidad o de equilibrio interno. Esta función no será, originalmente, más que un caso particular de necesidad de equilibración pero, en presencia de una continuidad de relaciones $A=B=C\ldots$ o $A<B<C\ldots$ consiste en la búsqueda de la totalidad del encadenamiento por oposición a los sectores particulares.

Ahora bien, si una estructura formal no llega a ser determinada por su contenido (aunque, recordémoslo, el contenido y la forma se mantienen en parte indisociables al nivel de las operaciones concretas), y, en particular, si la necesidad no puede contener más que a la forma, esta función de coherencia, de encadenamiento o de unidad no llegaría, por el contrario, más que a resultar favorecida o inhibida según los contenidos. Recordemos ahora que la función general de las operaciones es actuar sobre lo real enriqueciéndolo mediante cua-

---

siones reales o causales), sin aludir al estado de las «operaciones formales».

dros y estructuras que permitan su asimilación, y este esfuerzo general de comprensión, donde el sujeto debe inventar y construir constantemente para poder asimilar, se traduce por los intentos de transformaciones y no de copia. En tal situación es obvio que los sectores de lo real más aptos para favorecer el funcionamiento de las operaciones y particularmente para dar contenidos a las exigencias funcionales de encadenamiento o de coherencia, no serán aquellos que permanecen inmóviles o estáticos, sino aquellos donde lo real mismo actúa y se transforma, dicho de otra manera, todos los dominios de la causalidad. En otros términos, el niño puede, según la ocasión, interesarse en seriar por seriar, clasificar por clasificar, etc., pero, en general, es en ocasión de acontecimientos o de fenómenos que necesitan explicación y de finalidades que deben ser alcanzadas por disposición causal, que las operaciones serán plenamente ejercidas.

Por lo tanto, la solución parece ser la siguiente: el elemento común a la transitividad operatoria y a la transmisión causal, en el estado en que cualquiera de ambas no está todavía más que en vías de ser adquirida, será, en consecuencia, una función de totalización o de encadenamiento tendiente a superar los sectores iniciales para considerar el conjunto del sistema [1]. Ese funcionamiento será favorecido por las situaciones causales, donde la relación entre las secuencias sucesivas se impone especialmente, puesto que éstas son temporales, y actuarían como funcionamiento general progresivo en el cierre de los sistemas operatorios, de donde la constitución de esta forma de composición que es la transitividad ahora

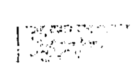
1. Notemos que se encuentra a todos los niveles de las equivalencias de tal función. Por ejemplo, un animal colocado en un medio desconocido, tiende a explorarlo lo más completamente posible. Del mismo modo, en una experiencia de condicionamiento debida a A. Rey, donde el cobayo dispone de tres casilleros sucesivos *A*, *B* y *C*, donde una señal anuncia una descarga eléctrica en *A*, el animal comienza por saltar de *A* a *B*, para volver a *A* una vez pasado el peligro, mientras que en la serie, y sin nuevos condicionamientos, hizo todo el trayecto *ABC* y después *CBA*, para lo cual no estaba, en modo alguno, adiestrado.

aparece como necesaria. Recíprocamente, y en respuesta a esta acción funcional de los contenidos sobre la elaboración de una forma (no siendo la forma a nivel concreto, sino la estructuración de niveles sucesivos), la transitividad recaería sobre la causalidad conduciendo a la transmisión mediata, con pasaje a través de mediadores (aunque éstos conserven cierto movimiento: forma «semi-interna»).

En una palabra el intercambio entre la causalidad y la operación consistiría, en ese caso, en una acción de los contenidos (causales) sobre un funcionamiento cognoscitivo que favorecerá la construcción de una forma operatoria, reactuando, a su vez, sobre los contenidos. Dicho de otro modo, la abstracción refleja que ha permitido la elaboración de la transitividad, y de ahí su atribución al objeto bajo forma de transmisiones causales mediatas, se habría visto facilitada en su ejercicio por el conocimiento de cierto número de hechos causales (transmisiones inmediatas sucesivas) adquirido por abstracciones físicas, pero reforzando la necesidad de cierre de la estructura operatoria en formación. Tal proceso puede parecer muy complicado, pero la historia de las ciencias abunda en casos de este género. Si nos atrevemos a comparar las cosas pequeñas a las grandes (*si parva licet...*), recordemos las circunstancias de la invención del cálculo infinitesimal. Matemáticamente estaba virtualmente en vías de constituirse tan pronto Descartes efectuara la síntesis del álgebra (acabada) y de la geometría (acabada) en una geometría analítica: sólo era necesario prolongarla en un álgebra del infinito y en una teoría de los pasajes al límite. Pero para que Newton y Leibniz franquearan este doble paso, que habría podido resultar de generalizaciones directas por abstracciones puramente reflejas, fue necesaria la incitación producida por los problemas físicos o, dicho de otro modo, la sugestión que emana de los contenidos tomados de la dinámica: el cálculo del infinito que así surgió no por eso constituye un producto de la experiencia o de abstracciones simples extraídas solamente del objeto. Pero éstas han desempeñado un rol de aceleración favorable a un funcionamiento generalizador, aunque éste último haya reen-

contrado el terreno matemático en el cual es efectuada la construcción en cuestión[1]. Recordemos también la teoría de las funciones de derivadas parciales, cuyo desarrollo se vio constantemente favorecido por los análisis físicos (Euler y d'Alembert, este último a propósito de las cuerdas vibratorias, Laplace en lo que corresponde al potencial, Fourier en lo que respecta al calor). Un ejemplo espectacular, muy cercano, ha sido el del *delta de Dirac,* cuya formulación física inicial carecía de rigor matemático y, sin embargo, dio nacimiento a una de las más bellas concepciones de la matemática contemporánea: la teoría de las distribuciones de L. Schwartz[2].

De modo general, parece incuestionable que los problemas de la causalidad física han dado, con frecuencia, la oportunidad para invenciones matemáticas de manera tal que, más que copias de lo real, eran reconstrucciones operatorias de un fenómeno cuyo conocimiento había sido previamente impuesto por la experiencia. En nada debe sorprender, entonces, reencontrar algo de tales procesos desde los comienzos de los conocimientos operatorios y físicos en la infancia.



1. J. B. Grize ha mostrado, sin embargo, que aun en el terreno matemático las derivadas han conservado, durante mucho tiempo, una significación temporal y que se ha debido esperar los comienzos del siglo XIX para que el tiempo fuese definitivamente eliminado del cálculo diferencial.

2. De ahí la dedicatoria que Lighthill puso en su obra *Fourier Analysis a generalised Functions*:

To Dirac who saw that it must be true
Laurent Schwartz who proved it
and George Temple who showed how simple it could be made.

(A Dirac, que vio que debe ser verdad / a Laurent Schwartz que lo comprobó / y a George Temple que demostró cuán simplemente podía hacerse.) En inglés en el original. (N. del T.)

§ 5 / TRANSMISIONES E INFERENCIAS INMEDIATAS: SIGNIFICACION DE LAS ATRIBUCIONES

Si la causalidad ha podido desempeñar un papel en la constitución de la transitividad, al estimular en los estados pre-operatorios una función de encadenamiento, todavía puede ser útil hacer algunas observaciones acerca de las relaciones entre las estructuras causales y lógicas más elementales, en los niveles en que permanecen relativamente indiferenciadas y donde tanto las inferencias como las transmisiones continúan siendo inmediatas.

Se observan estas inferencias inmediatas desde el nivel sensorio-motriz, en la interpretación de los índices familiares. Un lactante que manifiesta impaciencia a la hora de la comida, se calma de inmediato al ver aparecer a su madre a algunos metros de distancia, lo que en términos verbales se traduciría por «mamá», por lo tanto, «mamar»; o, inclusive, viendo un objeto suspendido tenderá la mano, no para asirlo, sino para balancearlo, lo que equivale a la inferencia «suspendido, por lo tanto, balanceo». Así, se ve de inmediato que en tales conductas interviene una forma debida a la inteligencia del sujeto, y que es la unión inferencial o implicadora en el sentido de simples implicaciones significantes o extensas (por oposición a las implicaciones proposicionales) y un contenido que es causal, puesto que la combinación de «mamá» o «objeto suspendido» y de la acción correcta produce, causalmente, la mamada o el balanceo. Ahora bien, está claro, y éste es el único sentido de esta primera observación, que si la relación causal descubierta y vivida en la acción correcta no logra asegurar el desarrollo de un poder inferencial, puesto que éste depende de la actividad cognoscitiva del sujeto y del sistema de esquemas asimiladores reconocidos y generalizadores, ese funcionamiento interno de la asimilación inteligente no será menos favorecido y continuamente reforzado por las situaciones causales en que las anticipaciones son susceptibles de controles efectivos (el acierto o el fracaso del ba-

lanceo, según el comportamiento del objeto suspendido, si era móvil o no, etc.).

Esto no quiere decir que todas las inferencias inmediatas de los niveles pre-operatorios tengan un contenido causal: pueden ser clasificatorias («pipa implica papá»), etc., aunque en la mayor parte de los casos lo que le interesa al sujeto de los objetos es lo que ellos pueden producir por sí mismos o como instrumentos de la propia acción, es decir, su aspecto causal. Pero, en el terreno causal, es obvio que el funcionamiento de la inteligencia en sus esfuerzos de previsión o de comprensión es tanto más estimulado y desarrollado en cuanto los problemas propuestos por lo real son más variados y más interesantes: de donde una incitación funcional continua reforzará el desenvolvimiento de esquemas en su conjunto, es decir, de todas las categorías (clases, relaciones, etc.), aunque naturalmente, sobre todo, de aquellos que pueden ser estructuralmente análogos a las uniones en juego en el problema causal considerado.

En este sentido. el nivel I B es, en los problemas de transmisión, aquél en que el sujeto reduce las transmisiones mediatas a un encadenamiento de transmisiones inmediatas sucesivas; así, obviamente, es especialmente fértil en posibilidades de ejercicios del tipo de las que hablamos en el § 4 como una función de totalización o de encadenamiento, que pueden conducir a la elaboración de la transitividad.

Aquí nos parece necesaria otra observación para evitar posibles equívocos. Queda entendido, por lo tanto, que si bien la causalidad favorece los ejercicios funcionales de la inteligencia, las construcciones operatorias de ésta proceden también por abstracciones «reflejas» y no físicas o simples. De aquí la consecuencia de que la estructura operatoria final, una vez utilizada en la explicación causal, es efectivamente atribuida a los objetos y no extraída directamente de ellos. Pero, lo que aquí importa señalar, nada impide que la elaboración de la estructura operatoria (por ejemplo, la transitividad) se efectúe en oportunidad de la solución del problema casual y también al mismo tiempo. La estructura en juego es, en efecto,

una forma, y como tal construida por la actividad del sujeto para estructurar un contenido dado: que este contenido sea en primer lugar relativo a las clases (transitividad de los encajamientos *), o a las relaciones (transitividad de las equivalencias o de las diferencias organizadas), y que luego sea solamente causal (transitividad de las transmisiones), o que la construcción se inicie en la oportunidad en que un contenido causal pueda ser inmediatamente referido a otros, es algo que carece de importancia y puede variar según los sujetos. En cualquiera de estos casos, la forma es debido a una abstracción refleja y el contenido conocido por simple abstracción, de tal modo que en cualquiera de ellos la forma operatoria es, o bien únicamente aplicada, o bien atribuida a los objetos (contenidos), y, si la construcción de la forma ha comenzado en la oportunidad de un problema causal, esta atribución será instantánea, es decir, se cumplirá al mismo tiempo que la misma construcción (igual que en otros casos se trata solamente de la aplicación que resulta contemporánea de la construcción de las formas).

En lo que se refiere a la diferencia entre aplicación y atribución, el criterio es simple: en tanto el sujeto efectúa las clasificaciones, seriaciones, numeraciones o medidas, etc., es él quien actúa, mientras que los objetos se dejan tratar sin imponer al sujeto una de estas operaciones más que otra. Cuando, por el contrario, una composición operatoria es atribuida al objeto, como la transitividad en el caso de la transmisión, cuando son los objetos quienes actúan, es decir, en este caso aseguran por sí mismos la transmisión, entonces es el sujeto el que se somete a los hechos. Queda claro que él conserva su propia actividad, o sea que una operación atribuida es siempre, simultáneamente, aplicada y atribuida al objeto, pero la recíproca no es verdad, puesto que una operación puede ser aplicada a los objetos sin serles atribuida: por ejemplo,

* En el original en francés: «transitivité des emboîtements». Hemos traducido por «transitividad de los encajamientos», ya que esta expresión es fiel a los juegos de cubos realizados por los niños a los que Piaget se refiere. (N. del T.)

diez guijarros no son diez a no ser que un sujeto los numere por su correspondencia con otros conjuntos, en tanto que un movimiento se transmite sin la intervención del sujeto. Ciertamente, el niño cree (y no solamente él) que el número está en los guijarros, así como cree que una montaña siempre ha tenido su nombre y, cuando atribuye la transitividad al movimiento de las bolas, él se sitúa en el punto de vista de éstas sin sospechar que imagina (como el físico) que ellas operan como él. Pero en el primer caso, el error de la atribución no afecta en nada la validez de la numeración (que tiene su propia correspondencia, independientemente de toda interpretación ideológica), puesto que la atribución de una operación a un proceso causal es susceptible de control experimental y de progreso continuo en el afinamiento del modelo, y por lo tanto, de su interpretación.

En este sentido conviene, en particular, hacer notar que en el caso de la atribución de la transitividad operatoria a la transmisión mediata de movimiento, la primera comporta una invariante necesaria debida a su reversibilidad, en tanto la segunda no entraña una conservación cuantitativa de movimiento (ni *a fortiori* de la energía), y no será seguida de un progreso semejante hasta el estadio III.

Pero falta otra observación: la atribución de las operaciones a un sistema físico considerado como causal puede no ser, simplemente, favorecido por las convergencias entre los datos objetivos exteriores y las tendencias operatorias del sujeto. Es frecuente, por el contrario, que las contradicciones entre los hechos observados y el modelo operatorio escogido nos obliguen a modificarlo: en este caso el esfuerzo mismo de coherencia resultante engendra un nuevo sistema de operaciones atribuibles a los objetos, por el solo hecho de que la eliminación de las contradicciones implica un juego de inferencias que, por su misma naturaleza deductiva, constituye una nueva estructura operatoria. En consecuencia, en el caso del encadenamiento de las transmisiones inmediatas de movimientos del nivel I B, el modelo escogido es contradictorio respecto del hecho por el cual las bolas no parten las unas a continuación

de las otras: de donde una nueva construcción operatoria fundada por la mediatidad y la transitividad, y que conduce a transmisiones semi-internas del estado II (el movimiento «atraviesa» las bolitas al mismo tiempo que las desplaza ligeramente, aunque muy poco). Volveremos sobre el rol formador de contradicciones en el § VI de las conclusiones.

§ 6 / SIMETRIAS, COMPENSACIONES Y REVERSIBILIDAD

Otra forma precoz de composición origina los mismos problemas y con mayor agudeza todavía: es la compensación de las cantidades (por ejemplo el peso) en las situaciones de equilibrio, comparable, en el terreno causal, con el esquema operatorio fundamental de la reversibilidad. En este tipo de composiciones intervienen, en efecto, tres conjuntos de factores: datos de hecho, extraídos por abstracción simple de las experiencias del propio cuerpo o de las observaciones cotidianas en la manipulación de los objetos, la estructura operatoria de reversibilidad extraída por abstracción refleja de las autoregulaciones del sujeto y, finalmente, una tendencia funcional general del sujeto a la equilibración, fuente de autoregulaciones y, por lo tanto, en último lugar, del esquema de las operaciones reversibles, pero que podría (y ésta es una de las cuestiones a discutir) ser favorecida por las acciones causales. En efecto, si una relación simple de causalidad es irreversible, los estados de equilibrio (que deben ser explicados causalmente como las transformaciones) son, al contrario, caracterizados por la compensación de trabajos virtuales, de ahí una reversibilidad de hecho o mecánica (=igualdad de las fuerzas de sentido contrario). Vemos, en consecuencia, que el dominio de las compensaciones es uno de aquellos donde pueden extrelazarse más íntimamente y de modo más complejo los factores exógenos y endógenos, o la causalidad física y la operación.

En primer lugar recordemos los hechos. Desde los cuatro años

(R 15), los sujetos prevén que una regla apoyada perpendicularmente en el borde de una mesa terminará por caerse si llega a sobresalir un poco más de la mitad, aunque sin invocar el peso antes de alcanzar alrededor de 7 años y hablando, simplemente, de «grandes» o «gruesos pedazos». Pero se trata, verosímilmente, de una simetría inspirada por las acciones del propio cuerpo, pues si en lugar de una regla se tratara de una plaqueta rectangular (R 16), se constata que hasta el estadio II la plaqueta avanza oblicuamente (45°), y no perpendicularmente al borde de la mesa, caerá en función de una línea que constituye su mediana menor, y no de una línea oblicua correspondiente al borde de la mesa, y teniendo en cuenta la igualdad entre la parte por ella sostenida y la que sobresale. Igualmente, un cuchillo abierto es apoyado en su parte media sin tener en cuenta las desigualdades de peso entre el mango y la hoja, etc. Por otro lado, si sobre una balanza de platillos el niño prevé desde el nivel I B que el equilibrio será obtenido con dos bloques semejantes de igual peso (simetría), ya no ocurre lo mismo si se trata de cuatro bloques (dos de un lado y dos de otro) o de objetos diferentes del mismo peso.

El problema es todavía menos claro cuando, con un soporte circular (en el cual el punto de equilibrio está marcado por un anillo o centro, al que se añaden hilos, y que se desplazará en casos de desigualdad), se trata de equilibrar *n* pesos supendidos de un hilo por un lado y otro tanto agregando peso al hilo que pende del otro lado (R 17). Es necesario esperar el estadio II (hacia los 7 años) para que el sujeto esté seguro de la comprensión mediante la igualación de los pesos, sin mencionar las direcciones. Del mismo modo, los problemas de contrapeso no son dominados en el estadio I, puesto que se trata de retener o de hacer elevar un objeto: en las experiencias de inteligencia práctica en que la tarea es encontrar un medio para suspender un cesto metálico (R 18), se ve al niño de hasta cerca de 7 años utilizar cualquier objeto para alcanzar el cesto (hasta un lápiz colocado en una caja liviana), sin tener en cuenta los pesos respectivos. En el caso de un vagón en un plano inclinado, que puede ser elevado o retenido según los contrapesos suspendidos del otro lado de la polea, los sujetos del estadio I no perciben ninguna relación estable entre ambos pesos en juego[1] (R 19). Es verdad que en el estadio I la composición

1. Estos problemas de contrapeso son físicamente muy complejos, puesto que las condiciones de equilibrio varían con la pendiente. Pero,

de los pesos no es aditiva, variando éstos según estén situados más altos o más bajos, etc., pero los hechos que tratamos de recordar son relativos a alturas equivalentes donde, sin embargo, las compensaciones por igualación de cantidades permanecen incomprensibles en el estadio I. Por el contrario, en experiencias diferentes, el estadio II se caracteriza por esta comprensión, al menos, de iguales alturas (ver la R 16; véase también el equilibrio indiferente de la R 20, donde dos pesos iguales suspendidos verticalmente a dos alturas distintas se supone que se desplazan para alcanzar la misma altura).

El problema es ahora el siguiente: con el nivel de las operaciones concretas aparecen las composiciones aditivas y las cuantificaciones, lo mismo que el manejo de la reversibilidad, concebida como necesaria. Desde el punto de vista causal, el desequilibrio resultante de la desigualdad de los pesos en equilibrio o las compensaciones hasta lograr el equilibrio por igualación provienen de una misma estructura, pero atribuida al objeto y ya no inherente a las clases, relaciones o números construidos por el sujeto. ¿Tendremos entonces que admitir que el modelo causal no es más que el resultado de una proyección en lo real de los esquemas operatorios alcanzados por el sujeto en ese nivel de desarrollo y que estos esquemas derivan de la experiencia física, o, más aún, que intervienen interacciones análogas a las que vimos en el § 4?

Tratemos, en primer lugar, de reducir los datos del problema a su forma más general, ya que en los hechos precedentes intervienen nociones tan variadas como la simetría, la compensación, la reversibilidad y el equilibrio. Recordemos que la reversibilidad operatoria puede expresarse en la forma de una simetría (es incluso el lenguaje actualmente empleado para describir la estructura de grupo): la operación P^{-1}, inversa de *P*, será así designada como su simetría. En segundo lugar, un sistema físico está en equilibrio en tanto sus movi-

---

naturalmente, nos atenemos aquí a la simple comprensión de los hechos: que para retener un objeto es necesario un cierto peso y que para levantar un peso superior es necesario otro.

mientos (o trabajos) virtuales se compensan, lo que nos remite a una simetría. Por otro lado, una compensación cualquiera, ya sea una compensación activa del sujeto que intenta anular los efectos de una perturbación exterior o de una compensación física precozmente comprendida (tal como, por ejemplo, aumentar la fuerza de una bola activa modificando la pendiente o la altura de partida, para compensar un aumento de masa de la bola pasiva), equivale a igualar una acción y la acción contraria, por lo tanto, a restablecer una simetría. Así es, *a fortiori,* en las igualaciones de peso o de tamaño que hemos considerado anteriormente.

Es evidente que, después de lo anterior, mucho antes de alcanzar la reversibilidad operatoria sentida como necesaria, y también mucho antes de las composiciones causales válidas del estadio II correspondientes a estas operaciones reversibles, el sujeto descubre o aprende a conocer un conjunto bastante considerable de simetrías y de compensaciones. Sin hablar de simetrías perceptivas, podemos citar en el nivel sensorio-motor múltiples conductas compensatorias o tendientes a la simetría: apartar un obstáculo que ha obstaculizado el acceso a una meta, volver a levantar un objeto que se desliza o restablecer el equilibrio del propio cuerpo, colocar o lanzar un objeto a un costado del sujeto después de haberlo hecho del otro, etc. Las simetrías citadas más arriba (previsión de la caída de una regla que sobrepasa el borde de la mesa en más de la mitad, equilibrio sobre la balanza o en un columpio, etc.), no son, por consiguiente, más que casos particulares que se inscriben en una prolongada sucesión de situaciones vividas.

Así resulta, en primer lugar, que las operaciones reversibles no surgen *ex-nihilo,* sino que constituyen, como ya lo hemos señalado insistentemente, el caso límite de las autoregulaciones cuando la pre-corrección de los errores o la pre-compensación de las perturbaciones suceden a la corrección y a la compensación ulteriores resultado de acciones ya ejecutadas o pasivamente experimentadas. De inmediato es obvio que las compensaciones causales del estadio II de forma *quasi* ope-

ratoria, son preparadas por las simetrías y las compensaciones cercanas al estadio preoperatorio I. Por el contrario, es dudoso que estos bosquejos todavía incompletos y en parte contradictorios, sean suficientes para explicar los progresos del estadio II en ese sector de la causalidad, y la influencia de la reversibilidad operatoria con sus compensaciones cuantitativas parece ser necesaria. Sólo que, nuevamente, si esta composición causal constituye a partir del estadio II una composición operatoria atribuida a los objetos, es menos cierto que, durante todo el estadio I, son las regulaciones compensadoras del sujeto más verosímilmente reforzadas o facilitadas por sus experiencias causales: parece, en efecto, evidente que la experiencia y, sobre todo, el ejercicio de las compensaciones, son susceptibles de adquirir un sentido mucho más concreto en los dominios en que los fracasos y, meramente, las dificultades, resultan de una resistencia de las cosas en sí mismas, en su realidad, más que en los del pensamiento, donde las no-compensaciones se traducen, simplemente, como errores susceptibles de no ser reconocidos como tales. Esta acción de la experiencia física sobre las autoregulaciones, fuentes de la reversibilidad, no significa, naturalmente, que ella sea, sin más, abstraída de lo real, sino simplemente que el largo proceso endógeno que desemboca en las operaciones reversibles es incesantemente reforzado por las reacciones de los problemas materiales y por la necesidad de encontrarles una solución.

A fin de cuentas, el origen común de la reversibilidad operatoria y de las propias compensaciones de las acciones causales debe, naturalmente, buscarse en el organismo, puesto que éste es, simultáneamente, sede de múltiples compensaciones físico-químicas mediante las que participa de las leyes de la materia y de una actividad homeostásica cada vez más diferenciada, de la que procede un número creciente de regulaciones, entre ellas la del comportamiento que caracteriza las conductas del sujeto. Volveremos sobre esta cuestión en las conclusiones de este ensayo (en X).

§ 7 / LAS COMPOSICIONES INTERNAS DE LOS CUERPOS

Un campo particularmente rico de combinaciones entre las abstracciones reflejas, fuentes de las operaciones, y las abstracciones físicas o simples que intervienen en la solución de todo problema causal, es el de las nociones que tiene el niño de la composición de los cuerpos y de los cambios de estado de la materia. El desarrollo de estas explicaciones reviste un doble interés para nuestro problema general.

En primer lugar, puede ocurrir que un fenómeno físico sugiera, por su naturaleza misma, el empleo de una composición operatoria de forma aditiva, y de allí una «atribución» precoz, mientras que en otros sectores será más tardía, puesto que nada en los objetos considerados parecería imponerla. Es así que en el caso de la disolución del azúcar, el hecho de que el trozo inicial se separe de modo visible en pequeños trozos y luego éstos en granos cada vez más pequeños, permite a los sujetos, a partir del nivel II A, suponer que el agua los separa y, desde el nivel II B, que terminan por subsistir bajo una forma invisible (en los casos en que no se transforman en almíbar) y que su reunión equivale aditivamente al todo inicial[1]. Por el contrario, semejante modelo corpuscular no se constituye, en general, más que hacia los 11-12 años para los cuerpos que no se disuelven o para los cambios de estado de la materia, cuya rapidez y modificaciones cualitativas presentan otros problemas. Este contraste entre la disolución del azúcar, comprendida desde los 7-8 años, y las otras situaciones dominadas solamente en el estadio III, recuerdan la diferencia entre las transmisiones mediatas semi-internas del estadio II, con movimientos prestados a los objetos y la transmisión puramente interna del estadio III, en el que el sujeto admite la existencia de realidades no perceptibles (pasaje de corriente en los casos de la transmisión, o corpúsculos en el caso presente).

1. Véase Piaget y Inhelder, *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*, capítulo IV.

Otro interés de las composiciones aditivas prestadas por el sujeto a ciertos cuerpos en oposición a otros, es la relación de dependencia que existe entre las nociones y los modos de la propia actividad. Es así que la manipulación de los objetos que comporta una regulación activa suscita, rápidamente, la idea de que los sólidos están compuestos por partes (macroscópicas) pegadas conjuntamente y los líquidos por partes móviles, mientras que desde el momento que la visión no comporta tales regulaciones sino en lo que concierne a la dirección de la mirada, no hay luz que pase del objeto al ojo o de una lámpara a la mancha luminosa proyectada a cualquier distancia, sino que, por el contrario, la mirada es una realidad casi sustancial que parte del ojo y reúne los objetos.

Recordemos, a grandes trazos, los hechos observados. En lo que se refiere a la vieja experiencia con el azúcar (reconsiderada en la R 21 en lo que hace al mecanismo de la disolución) y a la de la difusión de una pastilla de carbón en el agua (R 22), la evolución es muy clara. En el punto de partida (estadio I) no existe conservación de la materia (el azúcar desaparece y, en el caso del carbón, el agua simplemente se vuelve negra) ni conservación de granos (que se hacen líquidos antes de desaparecer o de colorear el agua), y la disolución del azúcar es, primeramente, atribuida (nivel I A) a simples roturas debidas a la cuchara o la caía del trozo inicial. En el estadio II, existe conservación de la materia y de los granos (bajo la forma de pequeños sólidos, a no ser que se licúen o que «transformen el agua en color»), cuya suma equivale al trozo total del comienzo; pero estos granos que serían visibles a la lupa no contienen, en sí mismos, elementos más pequeños. En el estadio III se considera, por el contrario, que contienen ultra-granos a título de últimos elementos. Otra investigación destinada a poner en relación las composiciones internas y externas (R 23) consistió en hacer volcar en una gran vasija ya un líquido ya cierta cantidad de piedrecillas y luego preguntando el porqué de las diferencias, y en hundir una varilla en agua, en aceite, en melaza, en azúcar en pequeños trozos, polvo o harina, con el fin de explicar las acciones de mojar o adherir. En el estadio I el agua se derrama, puesto que es «fina» o «delgada» y también «resbaladiza», etc., mientras las piedrecillas se mantie-

nen, porque son «espesas» o debido a que «no es posible romperlas, en cambio la leche ya está rota»; son irrompibles debido a que los trozos son prietos en el sentido de bien pegados. En cuanto a las acciones de mojar y de adherir, no encontramos más que explicaciones de potencialidad en el sentido tautológico: el agua moja «puesto que no se la hace dura, ya que si no no sería agua» y los cuerpos que se adhieren lo hacen debido a que «son un poco pegajosos». En el estadio II, por el contrario, se nota un triple progreso:

1) El fluir del agua y el amontonamiento de los guijarros obedecen a acciones causales entre las partes del conjunto: en el caso de los guijarros las capas inferiores retienen a las superiores, en tanto que las capas de agua se mezclan, «hacia arriba y hacia abajo», «no puede mantenerse arriba», etc.

2) En cuanto a esta diferencia de resistencia, se debe al hecho de que «los líquidos se desplazan solos», en tanto que las piedrecillas son de arena, de migas o de granos de polvo, bien unidos en una sola cosa (como «una especie de argamasa», etc.).

3) Las acciones de pegar o mojar son explicadas entonces por modelos análogos: las cosas finas mojan sin pegar, «las cosas espesas se mantienen mejor», como la melaza, cuyas gotas son más «gruesas». En cuanto al azúcar impalpable se adhiere a la varilla puesto que se «agarra», en tanto que en trozos «los granos tienen puntitas, y se sostienen por las puntitas», etc.

Finalmente, en el estadio III los modelos semi-macroscópicos y semi-microscópicos ceden el paso a estructuras específicamente corpusculares, pero con dificultad en tornar homogéneos los elementos últimos de los líquidos y de los sólidos, sobre todo debido al carácter continuo de los primeros; de ahí las fórmulas como la siguiente (12;5): las gotas «están como encajadas una dentro de la otra», mientras que los granos de las piedrecillas «permanecen desunidos», es decir aglomerados.

Parece no haber duda acerca de la evolución que acabamos de reseñar en cuanto a la estrecha dependencia que tiene con las operaciones aditivas. En el estadio I, donde sobre el terreno operatorio todavía no hay conservación de conjuntos según la manera en que están reunidos los elementos y por lo tanto tampoco operación reversible de adición, tampoco se encuentra el modelo corpuscular, excepto bajo la forma de

trozos macroscópicos, ni de conservación de trozos o granos una vez que ellos han sido invisibles: el azúcar se disuelve ante todo a causa de rompimientos (R 21), antes de desaparecer; el carbón se funde bajo la forma de simple color, etc. Por el contrario, en el estadio II, en el cual se constituyen operatoriamente las reuniones o adiciones y la conservación del todo, vemos cómo se elaboran paralelamente los modelos corpusculares semi-microscópicos tales como el conjunto de los granos equivalente a la totalidad, y de que los elementos se sostienen, más o menos, de diversas formas. En el estudio III esta composición aditiva es generalizada hasta el punto de no ser observable microscópicamente. Además, no se trata, meramente, de operaciones del sujeto aplicadas a los objetos, sino de operaciones atribuidas, puesto que son los elementos de los objetos en sí mismo y se comprenden como disasociándose o reuniéndose de manera causal.

Pero en lo que concierne a las relaciones entre las operaciones y esta causalidad, el problema es algo diferente de lo que hemos visto en la transitividad o en la reversibilidad. Sin duda las composiciones aditivas son, al igual que esas formas operatorias precedentes, preparadas por conductas preoperatorias consistentes en acciones manuales y materiales de reunir. Solamente resulta difícil ver lo que, en la experiencia del niño, podría constituir reuniones espontáneas debidas a los objetos en sí mismos, con independencia de la acción humana: las piedras de un muro son dispuestas por el albañil, en tanto que las de una pared rocosa natural parecen haber estado siempre allí (excepto por el artificialismo contenido todavía en el estadio I). No se discierne, por lo tanto, la acción de la causalidad entre objetos en las operaciones aditivas.

Es verdad que si se oponen a las adiciones o reuniones lógico-aritméticas, que tratan sobre objetos imperceptibles, las adiciones infralógicas o partitivas, que conciernen a los objetos continuos, la situación cambia un poco. Entonces, la operación inicial es, efectivamente, la partición o seccionamiento, mientras que la reunión de las partes o trozos en un objeto total es la operación inversa. Ahora bien, parece que en la

experiencia física y causal de los objetos que puede tener el niño en su nivel e independientemente de sus propias acciones, el seccionamiento suele ser más frecuente que la reunión, lo que podría facilitar la función preoperatoria de las particiones. Sólo que el seccionamiento es una cosa y la reunión de partes separadas con conservación del todo es otra: al nivel I B de las nociones sobre la disolución del azúcar, el sujeto ya no dice como en el nivel I A que el trozo se ha roto al caer, etc., y comienza a admitir que el agua contribuyó a disociar los granos preexistentes, sin que por eso llegue a una adición que conserve el todo. La reversibilidad misma de la partición parece, en consecuencia, más difícil de encontrar, en lo real, por las incitaciones causales que favorecen el desenvolvimiento de las operaciones correspondientes y, en definitiva, éstas parecen desempeñar un rol más que fundamental, como lo muestra en la historia de las ciencias la influencia de las composiciones aditivas y de las numéricas (Pitágoras) en la formación del atomismo griego.

Por el contrario, si la causalidad específica de los objetos en sí mismos parece poco apta para acelerar el desarrollo de las operaciones aditivas, resulta evidente que las acciones preoperatorias consistentes en reunir o disociar los sólidos son de naturaleza simultáneamente dinámica, cinemática, espacial y lógico-aritmética, puesto que dichos sólidos están sometidos a los desplazamientos materiales que los aproximan o los distancian, etc. En este sentido es evidente que la causalidad favorece la formación de composiciones aditivas hasta el punto en que podríamos preguntar si un ser viviente rigurosamente inmóvil (en el supuesto de que esto fuera posible) llegaría a concebir adiciones o sustracciones. Pero se trata allí de una causalidad perteneciente a la acción del sujeto así como a sus interacciones con los objetos, y no de una causalidad limitada al dominio de las uniones entre los objetos exclusivamente.

Lo mismo se puede decir del caso en que la experiencia geométrica se aproxima más al de la adición: el grupo de desplazamientos impone, en efecto, la composición aditiva de

éstos, puesto que la suma de dos de ellos es todavía un desplazamiento $a+a'=b$. Esto es tan cierto que los partidarios de una intuición primitiva y extralógica del número o de la iteración $+n$ o $n+1$, como lo era Poincaré, a veces han visto, en la sucesión de pasos en la marcha, una especie de prototipo material de esta iteración. Sólo que las operaciones geométricas son operaciones del sujeto, al mismo tiempo que modificaciones del objeto, y cuando el sujeto efectúa por sí mismo los desplazamientos (tanto los de los objetos que manipula como sus propios movimientos), se trata, por cierto, en los comienzos físicos de estas operaciones, de acciones tanto causales como operatorias, aunque de una causalidad inherente a la propia acción, es decir, de un caso particular de la misma que acabamos de ver.

§ 8 / LOS CAMBIOS DE ESTADO DE LA MATERIA

Si la atribución de las composiciones aditivas macroscópicas a los modelos corpusculares que superan lo observable sólo se efectúa difícilmente, sucederá *a fortiori* lo mismo con los cambios de estado de la materia, aunque en este caso a las operaciones aditivas no se agregan más que operaciones espaciales de desplazamiento y de condensación. Esto aumenta el interés de reexaminar nuestras hipótesis sobre esta cuestión, pero primero recordemos los hechos.

La R 24 se ha ocupado de la fusión de cetaceum. En el curso del estadio I el sujeto se rehusa, en principio, a considerar lo líquido como constituyente de la misma sustancia que el polvillo inicial: «el agua se muestra al calentar eso» o «eso ha hecho agua», pero sin que se trate de la transformación de una materia permanente. En el curso del estadio II (7 a 10 años), esta identidad es, por el contrario, reconocida pero sin que los granos subsistan en lo líquido, porque «se transforman en agua», etc. No existen conservaciones cuantitativas entre los dos estados pero, en ocasión de un retorno al estado inicial, se reencuentran las mismas cantida-

des: Nic tiene 8 años y dice que será el mismo peso «puesto que es la misma cantidad de granos» que antes de la fusión, y Pan, de 9 años, precisa que «si antes había un millón ahora hay también un millón y es el mismo peso», y esto a pesar del hecho de que, entre tanto, «se han fundido». En el estadio III observamos un comienzo de permanencia de granos invisibles en el líquido, aunque menos que en el caso del azúcar que se disolvía en el agua, mientras que aquí lo sólido se transforma, a menudo, en líquido. Por el contrario, si se hace comprobar la conservación de los pesos al pasar de un estado a otro, el modelo corpuscular resulta notablemente reforzado: Rus de 10,11 dice, por ejemplo, «de todos estos granitos habrá líquido que sale y ya no habrá más granitos» (se pesa). «¡El mismo peso! No hay menos granitos. Hay la misma cantidad... porque no hemos quitado nada». Y Bes, de 11,6, después de decir que los granos «se han fundido», cambió de idea en cuanto se planteó la pregunta de la conservación de los pesos: «ah... sí, siempre habrá el mismo número. Si lo calientan habrá el mismo número. Si lo vuelven a enfriar también habrá el mismo número». Las transformaciones de la parafina de una vela (R 25) dieron lugar a las mismas reacciones del comienzo: en el estadio I la «cera» fundida no es más «vela», sino «su jugo», etc. Por el contrario, en el nivel II A, son los mismos trozos («arrugados», «descortezados», etc.), pero «pegados» o «mezclados» con lo sólido y separados, luego fundidos en el líquido. Al nivel II B se agrega al modelo corpuscular macroscópico la idea de «prieto», aunque los elementos terminan, todavía, por fundirse. Por último, en el estadio III los dos progresos consisten en que los corpúsculos subsisten invisibles en el líquido y, sobre todo, que «se desplazan como las bolitas que se tiran al suelo», mientras que en el estado sólido «están muy cercanos» y no pueden «moverse más».

En cuanto al pasaje del líquido al estado gaseoso, lo hemos analizado primeramente con el destilador de Franklin y éter sulfúrico (R 26), donde el pasaje del vapor es invisible aunque se efectúa mediante un tubo transparente. En este caso, los sujetos del nivel I B, aunque pudieron ver disminuir el líquido en una de las ampollas y aparecer luego aumentado en la otra, se negaron a admitir un pasaje de materia y prefirieron creer que el agua venía desde afuera, aunque el dispositivo estaba visiblemente cerrado. En el nivel I B había pasaje de materia, pero lo juzgaban

incomprensible. En el nivel II A era visto del mismo modo y también como conservación de la materia, aunque sin ninguna idea de evaporación. Por el contrario, ésta se impone a los 9-10 años (II B), pero vacila entre las ideas de transformación y de emanación. Por último, en el estadio III el vapor es concebido como «minúsculas parcelas de agua» que en el estado líquido «están reunidas, muy estrechamente».

Recordemos, además, que en una investigación (R 27) sobre el vapor de agua y sobre el olor, los sujetos del estadio I creían que el vapor salía del agua, pero sin que hubiera identidad sustancial entre ambos y que el olor permanecía adherido al cuerpo perfumado, sin movimiento hasta la nariz. En el nivel II A es aire o vapor que se desplaza y este último ya está formado por «finas capas de agua», etc. Al nivel II B, el olor resulta de una mezcla entre el aire, que circula, y «alguna cosa adentro», emanada de los cuerpos, pero sin constituir todavía los corpúsculos propiamente dichos. Finalmente, en el estadio III, el olor y el vapor están formados por elementos últimos («granos», «puntos», etc.) y que, en ciertos casos, escapan a la dicotomía sólidos-líquidos, en consecuencia granos o gotas, aunque presentan el carácter de «ir hacia todos los lados» en lugar de permanecer unidos.

Hemos visto que a pesar de la precocidad de las nociones sobre el hielo, que la experiencia familiar muestra como «agua pegada» o «apretada», etc., y a pesar de los actos cotidianos que imponen estas nociones de lo prieto y del espacio (aunque, naturalmente, en el terreno macroscópico, por oposición a lo «prieto» corpuscular que caracteriza en el estadio III la noción de densidad), los cambios de estado de la materia presentan al sujeto problemas durante mucho tiempo insolubles. Notamos también, al comienzo, el rechazo en admitir una identidad de sustancia entre los estados alternativos y la tendencia, al principio invencible, a reemplazar la idea de emanación por la de transformación. Sin embargo, las operaciones en juego durante las explicaciones finales sólo son muy elementales, excepto una dificultad por cierto considerable: se trata de atribuirlas a micro-objetos no perceptibles. Estos se reducen, en efecto, a simples composiciones aditivas por un lado y, por el otro, a la noción de que las partículas, al pasar

del estado líquido al gaseoso, se esparcen y se vuelven más móviles. Ahora bien, cuando se trata de elementos macroscópicos, no solamente estas tres operaciones son corrientes en los comienzos del nivel II A, sino que también corresponden a múltiples acciones materiales preoperatorias, de las cuales ya hemos podido ver al final del § 7 la significación simultáneamente causal y casi operatoria. El hecho de que las mismas operaciones sean tan difíciles de atribuir a los objetos en cuanto se sitúan a escala inobservable, donde la acción sobre los corpúsculos individuales se torna imposible, parece, pues, confirmar retroactivamente que, en los casos donde todo es visible, la acción desempeña un rol a la vez causal y formador de operaciones en la constitución de este tipo de causalidad por composiciones aditivas.

Dicho esto, recordemos también que este modo de explicación no sólo equivale a atribuir a los objetos reuniones o disociaciones de carácter general o indeterminado, sino que la atribución llega a abarcar las relaciones numéricas en sí mismas. El número entero resulta de una síntesis del orden y de la inclusión que interviene a partir de la continuidad de los números naturales o en las correspondencias biunívocas establecidas por el sujeto entre un conjunto y otro. Como tal el número interviene de manera esencial en la mayoría de las operaciones aplicadas al objeto. Pero, cuando en el estadio II, los sujetos Nic y Pan admiten que el número de granos de cetaceum retornará después de volver al estado sólido y a pesar de haber desaparecido durante la fusión, o cuando Rus en el estadio III, al ver que el peso del líquido conserva el del sólido y concluye que el número de granos es invariable en el líquido mismo, esos números ya no dependen de operaciones aplicadas sino de una atribución propiamente dicha, y el sentido se torna evidente: entre los granos del estado A y los del estado B (o aún de un retorno a A' luego de la desaparición momentánea en B) existe una correspondencia biunívoca que ya no es efectuada por el sujeto, pero depende de los objetos como tales y se presenta bajo la forma, ya sea de una identidad continua, ya de un resurgimiento de la identidad

después de una fase de desaparición: en tal caso esta correspondencia numérica es atribuida a la acción de los objetos mismos.

§ 9 / LOS PROBLEMAS DE DIRECCION SEGUIDOS DE IMPULSOS O DE TRACCIONES

Con las transitividades, compensaciones y composiciones aditivas examinadas hasta ahora, se trataba de las relaciones entre la causalidad y las formas generales de coordinación operatoria y hemos comprobado que, si la explicación causal siempre resulta en estos casos de una atribución de las operaciones al objeto, su desenvolvimiento no deja por eso de comportar cierto número de facilidades provenientes de la experiencia física, por intermedio de un funcionamiento más o menos reforzado o inhibido según los contenidos que se trate de estructurar. Con la cuestión de las direcciones, abordamos nuevos problemas, debido a que ya no se trata de coordinaciones generales y de relaciones entre las formas operatorias y los contenidos experimentales, sino de operaciones espaciales cuyo carácter propio es la elaboración de formas semejantes existentes en los objetos mismos y susceptibles de ser seguidas perceptivamente o por medio de la experiencia física.

De aquí, tres problemas fundamentales. El primero sigue siendo interior a las operaciones geométricas: éste es el de las relaciones entre la abstracción refleja, fuente de estas operaciones, y la abstracción simple o física de la cual procede, en parte, el conocimiento del espacio material o de los objetos. El segundo se vuelve a encontrar sin cesar en los campos donde la explicación causal interfiere con una estructuración espacial particular: ¿ésta dirige a aquélla o inversamente, o bien hay interacciones y bajo qué formas? El tercero nos remite a nuestra preocupación general: en los casos en que la causalidad está ligada a las coordinaciones espaciales ¿podemos afirmar, todavía, que resulta de una atribución de las operacio-

nes al objeto o bien su constitución ya no depende más que de los datos de la experiencia?

Un cierto número de resultados permite precisar los dos últimos problemas. Haciendo empujar las varillas *B* oblicua o perpendicularmente a la varilla activa *A* tocando una extremidad (R 28), se comprueba que los sujetos del estadio I no prevén más que traslaciones sin rotación para la varilla pasiva. Al nivel II A la rotación parcial de *B* con relación a *A* es comprendida aunque sin coordinación con la traslación respecto del sistema exterior de referencia. En el nivel II B, la coordinación es buscada pero no es lograda, y en el estadio III los dos sistemas de referencia son coordinados entre sí y los resultados del empuje correctamente previstos. Una experiencia análoga por medio de plaquetas rectangulares empujadas en diferentes puntos con una aguja o un lápiz (R 29) ha dado los mismos resultados en el nivel I A (traslación sin rotación), pero las rotaciones sin coordinación con las traslaciones son anticipadas a partir del nivel I B (sin duda porque al utilizar dos varillas semejantes a las de la R 28, permitimos al sujeto poner el acento en la dirección de la varilla activa). Al nivel II A la coordinación es intentada con diversos grados de éxito, al nivel II B, es logrado después de algunos tanteos y en el estado III de entrada. Si se hacen las mismas experiencias utilizando la tracción (R 30), encontramos resultados análogos, pero con referencias más precoces al rol de peso de las diferentes partes del objeto que se tira: al nivel II A todavía la acción de tirar agrega peso a la parte tocada (como ocurría, por otra parte, en el caso de empujar), aunque desde el nivel II B es el sector mayor (en relación con el punto de impacto) el que es más pesado. Igualmente, si en lugar de un rectángulo se presenta una plaqueta triangular, el punto de impacto para empujar o tirar del objeto en el sentido del propulsor ya no es elegido en el medio de la base, sino sobre la línea de partición en pesos iguales. Por el contrario, una plaqueta rectangular con un agujero descentrado, es todavía empujada en el medio y sólo en el estadio III la dirección es prevista en función de los pesos y éstos estimados en función del volumen.

Estos primeros hechos ya muestran que la dirección de los objetos empujados o de los que se tira puede ser prevista o interpretada de dos maneras, según se ponga el acento en los desplazamientos geométricos o que las fuerzas activas sean combina-

das con las resistencias (peso) del móvil pasivo. Ahora bien, el primero de estos dos procedimientos conduce a errores, o parece suficiente, aunque sólo desde el punto de vista de la previsión y no del de la explicación. Con un segundo grupo de hechos, cuatro varillas paralelas o en cruz empujadas en su base (R 31) o conjuntos de tres a *n* varillas articuladas (R 32), nos encontramos en presencia de un nuevo factor: la intervención de una figura de conjunto con efectos colectivos (R 31) o transmisión de movimiento de un elemento al siguiente. En el caso de las varillas, son primeramente (estadio I) interpretadas espacialmente como un todo (por ejemplo ||||) de manera que un móvil que viniera a empujarlas de derecha a izquierda por su base, las inclinará hacia la izquierda en el sentido del mismo movimiento si el sujeto (nivel I B) es capaz de prever la buena dirección para un solo elemento. En el estadio II esta dirección justa es prevista para las cuatro, aunque con (en II A) ciertas desviaciones globales que testimonian todavía la consideración de la figura como un todo, y la cuestión de las varillas perpendiculares al costado de una plaqueta cuadrada que las hace girar no es aún resuelta, al no existir comprensión de detalles de la acción de los cuatro ángulos. El conjunto de problemas no es resuelto hasta el estadio III. Con los dispositivos articulados de la R 32, el dispositivo |–| (en el que un empuje de la varilla vertical inferior hace girar la varilla horizontal alrededor de un tornillo en su parte media y descender la varilla vertical superior tirada por la precedente) da lugar a previsiones y explicaciones correctas desde el nivel II A. Por el contrario, si se agregan elementos con diversas combinaciones de empujes y tracciones, se observan dos métodos: uno, que logra su objetivo, consiste en seguir paso a paso las articulaciones, lo que subordina la previsión a la comprensión dinámica; el otro, que fracasa o hace retrasar las soluciones, consiste en razonar acerca de la figura de conjunto en busca de las simetrías, contrastes o analogías, que dependen más de las configuraciones que del dinamismo.

Las R 33, 34 y 35 se han ocupado del choque de una bola sobre el costado de otra, o de una sobre el costado de una caja circular, siendo los dos problemas el de la dirección de partida del móvil pasivo *B* en función del punto de impacto y de la del móvil pasivo *A* después del choque. En el estadio I, la dirección de *B* prolonga la de lanzamiento *A* y ésta continúa su camino o «va a

otro lado». En el nivel II *A,* la bola *B* parte en dirección opuesta a la de choque, pero sin tener en cuenta las variaciones de detalle del punto de impacto y la dirección de *A* después del choque continúa siendo, generalmente, mal prevista. Después de los progresos graduales del nivel II B, pero sin que todavía la línea de partida de *B* pase por su centro («sólo el punto donde eso toca es importante», dice aún un sujeto de 11;0), el nivel III está caracterizado por dos comprensiones: la del rol de ese centro de *B,* y una desviación correcta de *A* debida a la reacción de *B,* que la «rechaza», la «despide», etc., en forma simétrica al choque que ha recibido. En breve: en el dominio de estas direcciones después del choque, éstas parecen netamente subordinadas al desarrollo de la explicación dinámica más que dictadas por razones geométricas.

Por el contrario, en el caso de una pared fija uno puede preguntarse si el descubrimiento progresivo de la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión no es un asunto de pura simetría espacial. Por lo tanto hemos retomado, desde el punto de vista causal, las antiguas experiencias de B. Inhelder sobre la inducción de esta ley en caso de choque de una bola contra una pared (R 36) y hemos vuelto a considerar con ella el caso de la reflexión en un espejo (R 37). Ahora bien, en lo que concierne a la pared, sólo es, en principio (estadio I), un obstáculo que la bola debe evitar: de ahí la previsión de trayectorias curvas, que no la tocan, para evitar el choque. En el nivel II A, la pared modifica la dirección al enviar la bola al costado opuesto, pero sin considerar los ángulos, puesto que las variaciones de la reflexión dependen de la fuerza de lanzamiento o de la «recuperación del impulso» después del choque, etc. En el nivel II B, por el contrario, la pared no es más que un mediador y el sujeto busca las co-variaciones entre las direcciones de la incidencia y de la reflexión. Por último, en el estadio III, la igualdad es postulada e inmediatamente explicada por las relaciones de la acción y de la reacción. En lo que concierne a las reciprocidades de las imágenes en el espejo entre personajes en diferentes posiciones (R 37), ya no es una cuestión de dinámica, aunque la comprensión de las direcciones no está menos ligada a las interpretaciones causales, ya sea que el «reflejo» haga «colisión» con el espejo (Bor, de 8,6) o que «vuestro reflejo llegue allí (↗) y mi mirada llegue allá (↖)».

Recordemos también dos investigaciones del punto de vista de las relaciones entre la causalidad y los sistemas de coordenadas na-

turales; la primera sobre los movimientos y regulaciones motrices necesarios para mantener vertical una larga varilla en la punta del dedo (R 38), y la segunda (R 39) acerca de las razones de la horizontalidad del nivel del agua. El primero de estos análisis muestra que si se encuentran a todas las edades aciertos prácticos, las explicaciones no están primeramente centradas más que sobre la propia acción; en el estadio III, por el contrario, los explicaciones recaen sobre el objeto cuando Sop (10,8) dice que «la base debe descansar sobre la punta» y esto «porque hay mucho peso arriba» (Sed, 12,1) y que así el equilibrio impone la situación vertical. En lo que respecta a la horizontalidad del agua, los sujetos que no alcanzan a preverla, la explican, una vez comprobada, por la acción del recipiente sobre el líquido, lo que corresponde a las relaciones entre figuras por medio de las cuales anticipan la orientación del nivel (oblicuo, etc.) sin relación con las referencias exteriores. Contrariamente, los sujetos que saben prever la horizontalidad (es decir que apelan geométricamente a las referencias exteriores), la explican por el descenso o el peso del agua, lo que excluye un nivel inclinado por razones de equilibrio, aunque supone la independencia del líquido con relación al recipiente y corresponde así causalmente a las relaciones entre las figuras o fuera de ellas.

Señalamos, finalmente, una investigación (R 40) sobre la dirección de gotas o hilos de agua en función del movimiento longitudinal de un tubo que tiene tres agujeros: se le pregunta al niño sobre la dirección de la caída de una sola gota, luego de un hilo de agua continua y sobre lo que ocurre en el momento de la partida y de la brusca detención del tubo. En el nivel I A no hay diferencia entre las direcciones así el tubo esté inmóvil o en movimiento. En I B el agua parte en la misma dirección que el tubo, por indiferenciación y no por transmisión, en tanto que en el nivel II A, el agua parte hacia atrás. Luego de las reacciones intermedias en II B, las respuestas del nivel III A consideran los dos sistemas de referencia y definen, para una gota, la trayectoria exacta: hacia adelante y luego vertical. Pero sólo en el nivel III B el hilo de agua es comprendido en tanto que «arrastrado».

De estos múltiples hechos es posible concluir, en primer lugar, que en todos los casos estudiados la estructuración geométrica de las direcciones se encuentra ligada a una dinámica, pero con dos reservas en cuanto a la naturaleza de esta rela-

ción. En primer lugar, se podría suponer que el factor espacial sólo interviene en los casos de simples previsiones sin explicación causal: por ejemplo, en los casos en que la plaqueta rectangular empujada perpendicularmente a la izquierda del punto medio de su base se supone que se desplaza «derecho hacia adelante» sin rotación y por subordinación a la dirección seguida por el propulsor; o también, cuando la previsión es justa y el sujeto anticipa, sin comprender el porqué, una rotación de algunos grados, puesto que el punto de empuje no está «en el medio». Pero en primer lugar, si así fuera, habría que hablar de operaciones espaciales (o de funciones preoperatorias) únicamente «aplicadas» al objeto y no «atribuidas», a falta de causalidad. Sin embargo, es probable que sólo se trate de casos límites, puesto que la falta de explicación explícita del sujeto no significa la ausencia de causalidad implícita, y el hecho de que intervenga un empuje, y el empuje de un objeto material sólido e indeformable, puede conducir al sujeto a atribuir a este empuje poderes diversos, como los de mantener al objeto «derecho» o de hacerle girar.

En segundo lugar, suponer que existe constantemente una relación entre la estructuración espacial y la explicación dinámica no significa que ésta sea siempre válida. Hoy que distinguir, por lo tanto, dos casos: según lo sea o no, e inclusive tres casos, puesto que si no es válida, la anticipación en sí misma puede ser justa o falsa. En caso de previsión justa y de explicación falsa (cuando, por ejemplo, el niño prevé bien la rotación de plaqueta rectangular, pero piensa que la parte empujada o tirada se vuelve más pesada por este mismo hecho, aunque sea la más pequeña), podría pensarse en un avance de lo geométrico sobre lo dinámico. Pero en el caso de anticipaciones y explicaciones falsas (como para la plaqueta de la misma forma, pero que presenta un gran agujero en un costado y que el sujeto empuja en el punto medio para «ponerla derecha») esta primacía de lo espacial tiende a una insuficiencia de la explicación dinámica (el «tamaño» y, sobre todo, el perímetro del rectángulo se estiman más importantes que la repartición de los pesos). De hecho, a veces es lo espa-

cial lo que guía a lo dinámico y a veces ocurre lo contrario, y esto hasta en el caso más interesante, que es el tercero, en el que tanto la explicación como la anticipación son correctas (por ejemplo, la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión explicados por la acción de la bola y la reacción de la pared).

En el tercer caso, es posible sostener que toda la geometría de las direcciones puede ser deducida de la dinámica [1]. La simetría de los ángulos precedentes depende de las acciones y reacciones; la horizontalidad del agua depende de su peso; las rotaciones y traslaciones de las varillas o plaquetas de las relaciones entre los pesos y las resistencias, en las dos formas de interacción que existen entre los móviles activos y pasivos, y entre éstos y el soporte sobre el que producen fricción (de ahí la necesidad de coordinar dos sistemas de referencia distintos), etc. Siendo así, es evidente que las operaciones espaciales de desplazamiento, dirección, etc., se tornan explicativas pero como solidarias de la dinámica y como «atribuidas» a los objetos, puesto que son éstas en sus conexiones causales las que determinan esas relaciones geométricas en isomorfismo con aquéllas que son propias de nuestras operaciones. Obviamente, la interpretación causal, a su vez, no es posible sino teniendo en cuenta las formas y posiciones iniciales de los objetos, es decir acordándoles desde el comienzo propiedades espaciales, tanto cinemáticas como dinámicas.

Esta estrecha interdependencia de la geometría física de los objetos, isomorfa a la del sujeto y su dinámica puede, por otra parte, descubrirse a partir de las nociones más elementales. Para el niño que las construye, una recta, por ejemplo, es geométricamente una línea tal que cada uno de sus segmentos puede coincidir con cualquier otro del mismo largo, si se lo transporta sobre éste, a condición de ir adelante y de no ser retraído al punto de partida como sobre una circun-

1. De una manera, por otra parte, comparable a lo que hace el sujeto cuando construye su geometría personal por medio de operaciones procedentes de acciones propias, que comportan todas ellas una cinemática e, inclusive, una dinámica.

ferencia. Desde el punto de vista cinemático o dinámico, caracteriza, por otra parte, las trayectorias que continúan sin cambiar de dirección. Ahora bien, si en el primero de estos dos casos, es el sujeto quien construye la recta (operación lógico-matemática que puede aplicarse al objeto); en el segundo caso son los objetos, pero éstos vuelven así a encontrar las propiedades inherentes a la primera de estas construcciones y constituyen, por lo tanto, operadores geométricos tanto como dinámicos. En el otro polo de nuestros conocimientos, cuando la teoría de la relatividad reduce los movimientos de los movimientos de los astros a movimientos inerciales, aunque obedeciendo a leyes de espacios en curvaturas, se podría ver en esto una geometrización total de la mecánica celeste; solamente que, como estas curvaturas dependen, ellas mismas, de las masas según Einstein, encontramos la interdependencia de la dinámica y de la estructura espacial [1].

Un caso sorprendente de esta interacción, que podemos agregar a los ejemplos genéticos precedentes, es el de la conservación de las dimensiones de los móviles que el conjunto de desplazamientos deja invariantes. En efecto, ya es sabido

1. Es verdad que durante los últimos veinte años hemos asistido a ensayos de reducción total de la dinámica a la geometría, que los campos y los cuerpos no se conciben ya como entidades sumergidas *en* el espacio (ya no lo estaban, tampoco, en Einstein) o interactuando con éste, sino como partes o formas *del* espacio, sin otra existencia que la espacial. Pero es conveniente, por un lado, no olvidar la existencia de la vida y, si las macromoléculas constitutivas de los organismos sólo son espaciales, dicho espacio concluirá por enriquecerse con un número impresionante de propiedades nuevas bastante próximas a un sistema de «acciones». Por otro lado, mientras sigamos distinguiendo en las operaciones geométricas del sujeto el espacio-tiempo objetivo del «medio» (y la biología nos obliga a hacerlo), es posible hablar, en este sentido, de un espacio de los objetos, aun cuando éstos no sean más que la sede de transformaciones espacio-temporales, y se encontrará, entonces, entre estas transformaciones objetivas y las operaciones del sujeto, la misma relación que existe entre la causalidad, en tanto producción de formas y de movimientos (puesto que este espacio es espacio-temporal), y las estructuras operatorias, como producciones intemporales. Véase a este respecto la Parte II de esta obra.

que es necesario esperar el nivel II B (9-10 años) para que el sujeto, habiendo comprobado por congruencia la igualdad de las longitudes de dos reglitas, admita que éstas siguen siendo equivalentes cuando se hace avanzar un poco una de las dos sobrepasando a la otra en aproximadamente la mitad: antes el niño consideraba que la que se empujaba se volvía más larga, a raíz del excedente (siendo éste último, cuando se interroga al sujeto sobre este punto, estimado también como mayor que el excedente inverso del otro bastón). Es posible resumir esta situación diciendo que, hasta el nivel II A inclusive, el sujeto no diferencia con suficiencia los desplazamientos de los alargamientos, y veremos en el § 12 que, en los casos de elásticos o de resortes (R 54), recíprocamente, el estiramiento resulta asimilado a una especie de desplazamiento en virtud de la misma indiferenciación. Además, ese alargamiento de los móviles (supuesto en el caso de las reglitas y real en el de los elásticos) no se estima homogéneo, sino de coeficiente superior hacia adelante, siendo este factor convergente con el de las estimaciones ordinales (más largo = llega más lejos). Ahora bien, el interés de estas reacciones y el de su atenuación o desaparición al nivel II B (conservación de la longitud de las reglitas y comienzo de la comprensión de la dilatación del elástico) consiste en que esta evolución, en apariencia puramente geométrica, está estrechamente ligada a la de la dinámica: se verá en el § 10 que el movimiento es concebido al nivel II A como constituyendo por sí mismo una fuerza, mientras que en el nivel II B fuerza y movimiento son diferenciados, siendo aquélla considerada como causa de éste. Se puede ver, entonces, la semejanza de estas dos especies de desarrollos: mientras que el movimiento en sí mismo sigue siendo dinámico, el móvil está provisto de una suerte de «motor interno» (además de su motor externo, los dos en un sentido casi aristotélico) y este poder se traduce en un concepto indiferenciado que depende a la vez del desplazamiento y del alargamiento hacia adelante, en tanto que desde el punto de vista geométrico éstos no son aún puestos en referencia con un sistema inmóvil de coordenadas exteriores a ellos (las únicas referencias están

constituidas por los objetos que el móvil sobrepasa, incluyendo al motor externo, o por una suerte de autoreferencia entre un estado y el siguiente); en el nivel II B, donde la fuerza se diferencia relativamente del movimiento, el motor externo es suficiente para explicar a éste que en este caso se reduce a un simple desplazamiento, mientras que geométricamente este último es puesto en relación con un sistema inmóvil y exterior de coordenadas (que se elabora, precisamente, hacia los 9-10 años, como lo muestra el ejemplo precedente de la horizontalidad del agua, o el hecho de que los objetos inclinados caen, a partir de este momento, verticalmente y no ya en una prolongación de su inclinación, etc.). En una palabra, la invariación de las longitudes, la diferenciación de los desplazamientos, las referencias interfigurales, etc., se constituyen en relación con la diferenciación de las fuerzas y de los movimientos; estos dos conjuntos de progresos geométricos y dinámicos se apoyan mutuamente.

En resumen, las operaciones lógico-geométricas son susceptibles de ser atribuidas al objeto de una manera comparable a las que ya hemos visto a propósito de la transitividad, de las compensaciones reversibles o las composiciones aditivas, y por consiguiente de las operaciones lógico-matemáticas más generales, pero con una diferencia que resulta fundamental. En el último caso, dos sistemas solamente están en presencia: las operaciones del sujeto y los operadores objetivos, isomorfos en los primeros, pero enriquecidos por una significación dinámica. Por el contrario, en el caso de las operaciones espaciales intervienen tres sistemas: la geometría puramente espacial del sujeto, la geometría espacio-temporal del objeto y su dinámica. Ahora bien, acabamos de admitir que en el terreno de los objetos, es decir de las operaciones atribuidas, los operadores espaciales y la dinámica son interdependientes. Pero falta examinar si el desarrollo de las operaciones geométricas del sujeto precede a sus explicaciones causales geométrico-dinámicas, en consecuencia si las operaciones espaciales aplicadas preceden a las atribuciones o si hay acción en los dos sentidos a semejanza de las situaciones examinadas en los § 4 y § 8. En definitiva,

se trata de saber si la abstracción refleja continúa siendo necesaria al conjunto de esta vasta construcción tripartita, como lo es en los casos anteriores analizados (con la reserva de ser funcionalmente estimulada por la acción de contenidos que proceden de la abstracción simple), o si la abstracción física simple basta para cubrir todas las necesidades.

Ciertamente, cuando el niño descubre que el nivel del agua es horizontal porque ésta es pesada y que en caso de inclinación las partes más elevadas pesarán y descenderán, es preciso que esté en posesión de las operaciones necesarias para construir un sistema de coordenadas y para comprender la oposición de las direcciones verticales y horizontales. Pero si la construcción de un sistema semejante se completa alrededor de los nueve años, edad promedio de estas explicaciones causales, y ello gracias a la generalización de las operaciones de medición en dos y tres dimensiones, ¿debemos admitir que ha existido primero elaboración geométrica y sólo después sus aplicaciones y atribuciones al proceso físico, o que la primera se ha desarrollado en oportunidad de una serie de problemas físicos y causales de los que éste último es tan sólo un ejemplo entre muchos otros posibles? De la misma manera, cuando hacia los once-doce años el sujeto se vuelve capaz de coordinar rotaciones y traslaciones tomando en cuenta dos sistemas de referencias a la vez, es claro que sin esta última capacidad, ligada a las operaciones formales u operaciones sobre operaciones (grupo *INRC*, etc.), no resolvería su problema causal. Y aún podemos preguntarnos ¿ha habido primero operaciones lógico-geométricas e inmediatamente aplicaciones seguidas de atribuciones, o construcciones correlativas estimuladas por el problema físico, aunque efectuadas por abstracciones reflejas?

Por el hecho mismo de que hay, en estos casos, de una manera permanente y a todos los niveles, tres sistemas en presencia (la geometría del sujeto, la del objeto y la dinámica), un orden regular de sucesión o de prioridades parece poco verosímil. Por cierto, la abstracción simple a partir de los contenidos de observación no es suficiente para engendrar las

transformaciones operatorias, aun cuando en el terreno de la geometría del objeto ya proporciona formas, favoreciendo así la construcción por el sujeto de formas semejantes, pero abiertas sobre muchas otras gracias al poder de las transformaciones. Asimismo, parece evidente que si el conjunto de leyes proporcionadas por la experiencia en un campo determinado no es suficiente para elaborar una explicación causal sin la elaboración de un aparato operatorio que constituye su razón, no por eso deja de provocar esta elaboración en virtud de las necesidades que suscita, es decir al crear una apetencia. En efecto, aquí, como en todo, una apetencia es ya una semicompetencia, puesto que la sensibilidad ante un problema no se puede sentir más que en el nivel en el cual se buscan los instrumentos adecuados para su resolución. En una palabra, en el terreno de las operaciones espaciales aún más que en los otros, y en razón de la trilogía, el contenido físico estimula incesantemente la construcción de formas operatorias, puesto que ya comporta formas geométricas que van a insertarse a título de estadios cumplidos en el sistema de las formas posibles que las superan aunque integrándolas.

§ 10 / LA CONSTRUCCION DE LAS FUERZAS

Después de haber examinado las composiciones aditivas y luego las cuestiones de dirección, estamos en condiciones de abordar la composición de las fuerzas que provienen de ambas a la vez, puesto que las fuerzas dependen de las masas que pueden adicionarse (aritméticamente) y, si no de las aceleraciones (pero a partir del estadio III solamente), al menos de las velocidades, ya que ambas tienen direcciones. Pero antes de examinar estas composiciones, recordemos primeramente la evolución de la misma noción de fuerza y su diferenciación progresiva a partir de la acción.

Notemos, en primer lugar, que una noción completa como $f = ma$ puede resultar, ya sea de una síntesis entre dos com-

ponentes inicialmente distintos, como en el caso del peso y del volumen como componentes de la densidad, ya sea de diferenciaciones y coordinaciones progresivas a partir de nociones indiferenciadas más simples, como es el caso en cinemática de la velocidad-relación $v = e:t$ a partir de la velocidad-excedente. Veremos las razones que existen para adoptar esta segunda solución en el caso de la fuerza, a partir de la dimensión «movimiento»[1] o empuje espacio-temporal y pasando por una etapa que se puede formular $fte = mve$ (por lo tanto $\frac{d\,(mv)}{dt}\,te$, y no todavía mdv equivalente de ma apenas visto en el estadio III únicamente)[2].

En tanto derivada de la noción indiferenciada de acción, la idea de fuerza no corresponde, en consecuencia, a una operación particular del sujeto que será atribuida en su especificidad al objeto, sino a poderes generales prestados a lo real en analogía con los de la propia acción. Son entonces sus composiciones progresivas las que toman por atribucio-

1. En efecto, la dimensión física «movimiento» A se define como el producto de la energía E por el tiempo t, por lo tanto $A=E.t$, lo que equivale a $A=Fe.t$ puesto que la energía se mide en trabajo Fe (donde F=la fuerza y e=la distancia recorrida). Por consiguiente la acción equivale también a $A=Ft.e$, donde Ft es el «impulso». Por otra parte, de $A=1/2mv^2.t$ se deduce $A=1/2\ mv.e$ (puesto que $v=e:t$), y conformándose con la «fuerza viva» de Leibnitz mv^2, se tiene $A=mv.e$, es decir el empuje ($p=mv$) por el espacio recorrido. Es este empuje espacio-temporal mve lo que parece constituir la noción indiferenciada inicial, sin que haya todavía una síntesis de nociones previas y distintas, m, v y e. Más exactamente, la noción cinemática indiferenciada v se completa, cuando interviene en una interpretación dinámica (al nivel II A en el que la fuerza se confunde con el movimiento) por un lazo global con el peso del objeto (m) y el espacio más o menos largo que recorre (e).

2. Recordemos que el mismo Newton escribió su segunda ley bajo la fórmula $f=d(mv):dt$. Las fórmulas $f=ma$ o $f=mdv:dt$ son, en realidad, de Euler y no de Newton (en un corolario de la mecánica de Euler de fórmula $m=f:a$). Los mejores textos actuales vuelven a la fórmula original de Newton, generalizable en la mecánica relativista, donde la masa no se conserva.

nes sucesivas formas cada vez más operatorias. En lo que concierne a las convergencias entre las fuerzas en juego o en lo real y las que intervienen en el comportamiento del sujeto no es preciso aclararlas en tanto se trate de acciones materiales [1].

Intentemos, en consecuencia, descubrir las etapas de la formación de esta noción de acción o de fuerza considerando la R 41 y de los comienzos de la R 42 y a ponerlas en relación entre sí y con las que han sido indicadas (§ 9) para las direcciones:

La R 41 ha considerado bolitas contiguas, suspendidas por hilos de una varilla horizontal; un balanceo de la primera y su choque con la segunda, hace partir a la última mediante una trasmisión análoga a la de la R 2. Al nivel I A insiste en los poderes de la bolita activa mencionando algunas veces las velocidades y también los pesos, pero indiferenciados dentro de una acción propia. En la R 42 se han planteado dos tipos de cuestiones: en primer lugar, la comparación entre los «esfuerzos», etc., respectivos de un personaje, etc., que sigue una curva sin carga desde *A* hasta *B* y otro recorriendo la recta *AB*, pero con carga; inmediatamente la comparación entre el lanzamiento (por choque) de un móvil desde *A* hasta *B* y su impulso paso a paso sobre el mismo recorrido. A estas dos cuestiones los sujetos del nivel I A responden invo-

1. Incluso en el terreno de las operaciones puramente deductivas o formales es posible percibir las siguientes analogías, que parecen comportar alguna verdad a pesar de su carácter audaz. Al empuje espaciotemporal $p=mv$ correspondería una acción operatoria cualquiera en la cual el poder es función: 1) de la cantidad de elementos manipulados (dominio de la operación en extensión), lo que responde a m; 2) del trayecto operatorio que se le hace recorrer en un solo acto (por ejemplo en un procedimiento recursivo), lo que responde a v. Admitido esto, la correspondencia operatoria de $d(mv)$ sería, entonces, una modificación de la operación, por ejemplo en la dirección de lo que podríamos denominar —a partir de Goedel— una estructura más «fuerte», es decir, que dispone de instrumentos sintéticos más «potentes». Parece aceptable, por ejemplo, sostener que un razonamiento por recurrencia es más «fuerte» que una serie de silogismos aislados, a la ver porque lleva a una serie ilimitada de elementos y porque su procedimiento es más amplio.

cando, alternativamente, uno u otro de los factores en juego sin llegar a confrontarlos. Si bien la noción central de este nivel I A es la de una acción espacio-temporal de empuje, etc., no se podría asimilar, todavía, a la magnitud física «acción» ya que sigue siendo esencialmente psico— o biomórfica.

Al nivel I B asistimos a unos inicios notables de descentralización. Para las bolitas suspendidas, los sujetos insisten por adelantado en los factores cinemáticos y en los pesos (aunque sin conservación) y conciben una sucesión de acciones bajo la forma de un encadenamiento de transmisiones inmediatas externas (cfr. el § 4). A las preguntas de la R 42, responden mediante una equivalencia cualitativa entre las fuerzas gastadas en un trayecto en línea recta con carga y otra en una curva sin carga, pero fracasan en la prueba de lanzamiento y del arrastre. Para las direcciones se recuerda el comienzo de las rotaciones, cuando el objeto pasivo no es empujado en su parte media. Es posible, entonces, hablar de un paso de la acción psicomórfica a un principio de acción con significación física.

En el nivel II A, que se recordará es aquél del comienzo de las transmisiones mediatas semi-internas (§ 4) y de una serie de progresos en la previsión de las direcciones cuando los choques o impulsos no tienen lugar en forma directa, los resultados de la R 42 muestran que en lo horizontal los sujetos juzgan equivalentes a las fuerzas necesarias para lanzar un objeto por medio de un choque o para empujarlo poco a poco a la misma distancia. En la R 41 se insiste en las velocidades y los cambios (toma de «impulso»), de tal modo que se podría hablar de una suerte de «fuerza» en el sentido de dp. Pero se observa una importante distinción en lo que concierne a las reacciones de los niveles II A y II B: en II A esta fuerza o *élan* sigue siendo interior al movimiento, en el sentido en que éste o la velocidad constituyen por sí mismos la fuerza [1], lo cual puede escribirse bajo la fórmula $fte = pe$ (donde p es igual a mv), mientras que en el idioma polaco existen dos palabras dife-

1. En este sentido, señalemos que esta concepción del movimiento y de la velocidad como fuerzas en sí mismas, se ha conservado en la historia de la física, al menos esporádicamente, hasta fecha reciente, y se encuentra en algunos manuales a propósito de la «fuerza» centrífuga; lo que ha dado lugar a las observaciones críticas de Hertz, para quien una fuerza sólo tiene significación cuando está «presente *antes* del movimiento» (*The Principles of Mechanics,* Ed. Dover, pág. 6).

rentes para impulso (según se trate de gran velocidad o de toma de impulso); los niños interrogados por A. Szeminska modifican significativamente su terminología al respecto.

El nivel II B, es el que marca progresos notables en los problemas de dirección (ensayos de coordinación entre las rotaciones y las traslaciones o de covariaciones entre los ángulos de incidencia y de reflexión, etc., véase el § 9), sin duda en relación con esta diferenciación más avanzada de la dinámica y de la cinemática. Pero el hecho de que la fuerza se vuelva causa de movimiento, aunque lleva al sujeto a plantearse una serie de problemas dinámicos nuevos, lo conduce, curiosamente, por eso mismo, a ciertas regresiones aparentes. Por ejemplo, en razón de que el peso produce efectos variados y desempeña un rol notable en la constitución de la vertical (o de la horizontalidad del agua, etc.), su acción ya no se conserva según las situaciones: aumenta con el impulso o en ocasión de una posición hacia abajo y disminuye a menudo con la velocidad (lo que puede escribirse: $m = p:v$).

Finalmente, en el estadio III los sujetos de la R 41 admiten una aceleración regular de las bolas en el nivel II B. Se puede entonces hablar de un comienzo de la fuerza $f = ma$.

Estos resultados se encuentran en una investigación análoga (R 43), pero en la cual, siendo las pistas curvas en ambos lados, la bola sube por la pendiente opuesta, luego vuelve a bajar, etc. En el estadio I las alturas alcanzadas siguen sin guardar relación con las de los puntos de partida. Al nivel II A las previsiones mejoran, pero están centradas en la longitud del descenso y todavía no en la altura. Al nivel II B ésta interviene al efectuarse verificaciones, pero como cierto número de sujetos considera que la velocidad disminuye con el descenso, se muestran al principio muy sorprendidos por el resultado contrario. En el estadio III, finalmente, el rol de la altura es previsto desde el principio y, además de la aceleración, se pueden observar ciertos progresos de la noción de fuerza: la equivalencia de las alturas de los puntos de llegada y de partida hacen hablar a ciertos sujetos de una «necesidad del empuje» o de una «fuerza en suspenso» que recuerda la energía potencial, pero no es todavía más que la generalización de la idea que se constituye en ese estadio, a saber, que las fuerzas continúan existiendo en estado inmóvil.

La evolución de la noción de fuerza es, en consecuencia, bastante extraña en la medida en que no procede mediante sín-

tesis de elementos previos sino por diferenciación y coordinación de caracteres inicialmente indiferenciados. En efecto, el sujeto no parte de una noción de la masa que estaría dada independientemente de la fuerza y por simple composición de las cantidades de materia, ni de una noción del movimiento con su velocidad, sin referencia a las fuerzas, para sintetizarlas en una nueva noción. Por el contrario, en los estadios iniciales, la masa ya posee una fuerza igual que el movimiento como tal y es sólo tardíamente, una vez diferenciados, que son coordinados en lo que se puede llamar una síntesis.

Comenzando por la masa, el niño no habla primero sino de «grosor» y de peso. Ciertamente, para nosotros es evidente que el peso es una fuerza, pero en el sentido preciso de una masa ligada a la aceleración de la atracción terrestre. Ahora bien, para los jóvenes sujetos esta aceleración no desempeña ningún papel y se podría creer, por lo tanto, que lo que él denomina peso no es más que cantidad de materia, es decir, masa. Pero ese peso ejerce, según ellos, toda clase de acciones que dependen de la fuerza y en todas las direcciones: un guijarro pesado sumergido en un vaso de agua empuja el agua hacia abajo o hacia arriba (y no a causa de su volumen: una pelota agujereada que al descender se llene de agua lo mismo hará elevar el nivel porque se volverá pesada); del mismo modo, en un gran tubo con tres agujeros a distintas alturas, el más alto lanzará el chorro más potente, puesto que tiene más agua debajo suyo y ésta ejerce entonces su presión al subir tanto como al bajar, etc. En resumen: el peso es, antes que nada, una fuerza por indiferenciación entre la cantidad y la acción, es decir una especie de coeficiente de acción. Hemos visto que hasta el nivel II A ocurre lo mismo con el movimiento que es tanto fuerza como velocidad y desplazamiento.

Cuando estas nociones son suficientemente diferenciadas, se efectúa una síntesis entre las composiciones aditivas aplicables al peso como masa y las operaciones ordinales constitutivas de la velocidad, y es esta síntesis operatoria la que se atribuye entonces a los objetos y es al mismo tiempo fuente de las composiciones vectoriales de las fuerzas que vamos a

considerar (§ 11). Recordemos solamente que este tipo de síntesis entre nociones que se han vuelto distintas, aunque primeramente poco diferenciadas, se encuentra en el ámbito puramente operatorio: es así que el número entero se constituye hacia los 7-8 años mediante la síntesis entre la inclusión de las clases y el orden inherente a las relaciones seriales, mientras que en los niveles preoperatorios los números figurados, las colecciones figurales y los comienzos de seriación participan todos de aspectos tomados simultáneamente de lo que más tarde llegarán a ser números, clases y seriaciones. Pero la síntesis de la fuerza, aunque de forma análoga (adición y orden), es más tardía, puesto que, sin duda, sólo se cumple en ocasión de las composiciones que ahora vamos a considerar.

§ 11 / LA COMPOSICION DE LAS FUERZAS Y LA CONSTITUCION DE LOS VECTORES

El criterio que permite apreciar si la formación de un operador está consumada es, seguramente, su capacidad de composición: la constitución progresiva de éstas desempeña, sin lugar a dudas el papel decisivo en esta formación, puesto que una fuerza en el sentido operatorio sólo existe en colaboración o en oposición a otras. Es lo que trataremos de examinar ahora.

En una investigación preliminar (R 44) se dispusieron tres pesos, F_1 F_2 F_3 colgados por medio de poleas a tres lados de un platillo cuadrado, y tirando de un indicador móvil situado en el centro (una simple cerilla en la intersección de los hilos). Al nivel I A el niño no puede imaginar que si se agrega un peso en cualquiera de las tres direcciones, el indicador se desplazará en la dirección de ese peso: puede dirigirse en cualquier sentido, como si el peso agregado lo rechazara o lo hiciera desviar; e incluso puede no moverse, porque «es muy pesado», es decir capaz de retenerse. Por el contrario, al efectuarse la comprobación, la tracción es comprendida.

Cuando después se agregan dos pesos iguales en F_1 y F_2 (F_3 permanece sin cambio) la cerilla no será tirada sobre la mediana, sino, primeramente, hacia un lado y después hacia el otro, puesto que las fuerzas sólo actúan en movimiento, y no colaboran entre sí (lo que depende, probablemente, de un mismo principio de acción individual autónoma). Por supuesto, los sujetos no saben explicar el equilibrio ni comprender por qué éste no cambia cuando se hacen agregados iguales a los tres pesos. Al nivel I B, el sujeto comprende que un agregado desplazará el índice hacia el lado del peso aumentado, pero no sabe prever el resultado de dos agregados iguales: o bien el índice no se moverá (como en el caso de dos pesos iguales de sentidos opuestos, sin tener en cuenta las direcciones), o bien habrá elección (de un lado *o* del otro), o finalmente alternancia, como en el nivel I A. En el estadio II (el 37 % de 6-7 años, 71 % entre 8-9 años y 66 % entre 10-12 años) el problema de la resultante mediana para dos agregados iguales sobre las tres fuerzas es resuelto, pero en cuanto se trata de variaciones diferentes de los tres componentes, la composición se torna imposible: se produce entonces un retorno a las reacciones preoperatorias del tipo I B y es preciso esperar un estadio III, entre los once y doce años, para encontrar una intuición de las direcciones exactas.

La R 45 ha considerado otras cuestiones preliminares: *A* y *A'* tiran en sentidos opuestos de un mismo hilo tendido horizontalmente entre dos poleas fijas a una pared vertical, luego se cuelga en el medio de ese hilo un tercer peso *B*, cuyos efectos habrá que prever y explicar, una vez comprendidas las relaciones entre *A* y *A'*. Ahora bien, las relaciones mismas son mal comprendidas en el estadio I y en relación con lo que vimos en el § 6: al nivel I A el sujeto ni siquiera sabrá qué es lo que va a subir o bajar en el dispositivo en M; en I B sabe que uno de los dos pesos *A* o *A'* retiene al otro, pero sin ningún intento de cuantificación. Un sujeto de 4,9 para retener en *A* un peso de 50 g pone en *A'* un juguete de alrededor de 5 g. Para $A = 1$, $B = 0$ y $A' = 1$, un sujeto de 6,6 dice que es *A* la que más «tironea», puesto que ha sido colocada última (en el tiempo). Otro sujeto de 6 años, al comparar $B = 2$ a $A = 1$ y $A' = 1$, piensa que $B > (A + A')$, porque cada una de las *A* está aislada, etc. ¡Pero la mejor manifestación de la falta de composición cuantitativa específica de ese estadio es que si se carga *A* y *A'*, a expensas de *B*, no sólo el hilo *AA'* pasará por un nivel horizontal sino, si se continúa, *B* ascen-

derá más allá de la línea *AA'* y hará con su hilo una suerte de techo (por ejemplo, para *A* y *A'* = 8 pesos de 50 g. y para *B* = 2 pesos)!

En el estadio II este ascenso aberrante llega a su fin, aunque *A*=*B*=*A'* y, *a fortiori*, si *B* es más liviana que *A* o *A'*, la línea *AA'* todavía sigue previéndose horizontal, puesto que *B* «ya no pesa nada». Aparte de esto, hay efectivamente compensaciones entre *A* y *A'*, como se vio en el § 6, pero el equilibrio es explicado por el hecho de que un peso no puede tirar más cuando hay otros que lo retienen, lo que equivale a decir que un peso no puede tirar y retener a la vez. En reposo, los pesos no «hacen ya nada», sólo tienen «tensa la cuerda» (7,7) y aún: «cuando se mueve tira, cuando no se mueve está tenso» (9,10). En el estadio III, finalmente, las tres novedades son: la bipolaridad de las funciones (cada peso es tirado al mismo tiempo que tira y es retenido al mismo tiempo que retiene), la reciprocidad que resulta y que se extiende al conjunto del sistema («porque todos tiran», 10,2 y «ya no hay más sentido», 12,3, sino una interacción general) y el hecho de que la fuerza continúa actuando en estado inmóvil.

Teniendo en cuenta que el defecto de cuantificación suficiente (que interviene en los estadios I y, a veces, también en el II) desempeña un rol esencial en las dificultades de la composición, lo hemos analizado por sí mismo en las R 46 y 47. En estas dos investigaciones se consideran pesos suspendidos uno debajo del otro a intervalos variados, o en columnas paralelas, o bien, algunos enganchados horizontalmente y otros verticalmente, etc., para juzgar sus efectos equivalentes o diferentes (a igualdad objetiva de pesos), ya sea cuando están situados del mismo lado de un platillo donde los hilos que los unen tiran de un elástico (R 46), ya sea en sentidos opuestos a ambos lados del platillo, es decir, en una situación de equilibrio (R 47). Ambos resultados han coincidido enteramente, pero no fue inútil controlarlos el uno con el otro, dada la complejidad de la evolución observada. En el estadio I no hay aditividad porque, por razones evidentemente psicomórficas, la acción del peso es una acción compleja donde la fuerza en juego no depende únicamente de los cuerpos pesados sino de los hilos y de sus longitudes, de la altura de las columnas, de las posiciones, etc., en resumen: de todo un contexto que recuerda al de la propia acción; este es el caso, en particular, según la manera en que un peso se engancha a otro y que conduce a esfuerzos comunes más potentes que las acciones individuales adicionadas. Un sujeto

de 6,10 llegará a decir que siendo el hilo *F* menos pesado que cada peso *P* puede desvalorizar la suma, de donde surge que $(3P + F) < (3P)$, ¡puesto que $F < P$! Para otros, un hilo largo favorece la tracción, etc. Al nivel II A, por el contrario, hay adición estricta independientemente de las posiciones y únicamente en función del número de los pesos, según los procesos de compensación y de reversibilidad descritos en § 6. En el nivel II B, donde, como hemos visto en § 10, la noción de fuerza se diferencia de los movimientos y velocidades para convertirse en su causa, estos progresos dinámicos producen una regresión aparente a la no-aditividad, pero por consiguiente por completo distintas a las del estadio I: por ejemplo, siendo peculiar del peso tender hacia abajo, su fuerza aumentará hacia abajo en una columna vertical y disminuirá en disposición horizontal, etc. Finalmente, en el estadio III se vuelve a la aditividad, pero en un sentido dinámico: «forman un todo, tiran de la misma cosa». Al compilar los resultados de las R 46 y 47 y los de la R 48 (donde los pesos apilados o dispuestos de diversas maneras sobre un platillo hunden una varilla en un soporte blando), se encuentran para estos cuatro niveles un 86 % de los sujetos pertenecientes al estadio I (4-6 años), 78 % perteneciente al nivel II A (7-8 años), 73 % del nivel II B (9-10 años) y 61 % del estadio III (11-12 años).

Siendo el otro obstáculo para la composición la modificación de las fuerzas según haya movimiento o reposo, conviene recordar la R 19: hasta el nivel II A, inclusive, se necesita más fuerza para retener un vagón inmóvil en una pendiente que para hacerlo subir: en efecto, cuando se lo retiene, tiene tendencia a bajar, mientras que si se lo hace subir no baja más y al suprimir esta tendencia hacia abajo, basta con una fuerza menor.

Consideremos ahora las mismas leyes de la composición según las intensidades y las direcciones de las fuerzas. En la R 49, algunos pesos que pueden ser dispuestos en semicírculo, se ubican de dos en dos a 0-0° (paralelos), luego a 90-90° (opuestos) y después a 30-30° y 60-60°, tirando por pares de un elástico retenido por un gancho en el centro. (Otras variaciones han permitido confirmar los resultados obtenidos.) En el nivel I A no hay anticipaciones correctas. En el nivel I B el sujeto comprende que si los pesos tiran al *máximo* a 0-0° y se inmovilizan a 90-90°, los efectos serán decrecientes al pasar de 0-0° a 30-30° y luego a 60-60°. Pero los ángulos no se mencionan y los únicos factores considerados son la lon-

gitud de los hilos entre las poleas y el elástico, o las distancias respecto de la extremidad libre del elástico o hasta el gancho. En el estadio II el ángulo es observado, y descrito, pero su acción no es comprendida: el sujeto sólo ve los factores de longitudes de los hilos o de la distancia. Tan sólo en el estadio III (11-12 años) el niño explica la disminución de la acción de los pesos por el hecho de que éstos tiran de lados diferentes, y su aumento cuando se aproximan, comprendiendo así el papel de las direcciones y del ángulo.

La R 17 (ya citada en el § 6) lo muestra de una manera sistemática. El dispositivo es circular con poleas desplazables a lo largo de la circunferencia. (I) Dos pesos son, en primer lugar, colocados en ángulos variables y la cuestión es encontrar el peso que los equilibrará una vez situados en el punto opuesto a la resultante de los dos primeros. En una segunda parte (II), las posiciones de los dos primeros pesos son fijas (60° y 90°), pero su valor es variable y la cuestión consiste en encontrar la dirección de la opuesta de su resultante. En el caso I, la intensidad a encontrar en F_3 depende, pues, de la dirección de las fuerzas indicadas en F_1 y F_2, mientras que, en el caso II, la dirección a encontrar de F_3 depende de la intensidad de F_1 y F_2. En realidad, ambas evoluciones han sido bastante paralelas, a veces con un ligero avance en las cuestiones de dirección. En el estadio I, se fracasó en todas las cuestiones, incluso para I, en aquella donde F_1 y F_2 están a 0° y y donde $F_3 = F_1 + F_2$ y, en el segundo caso (II), donde $F_1 = F_2$ y donde la dirección de F_3 es la mediana. En el estadio II (7-10 años), acertaron en estas dos cuestiones, pero en el primer caso fracasaron desde el momento en que el ángulo aumenta y en el segundo (II) desde que los pesos de F_1 y F_2 son desiguales. En este último caso, asistimos a tres tipos de solución: el sujeto elige o bien la opuesta de la bisectriz o mediana, como si los pesos fueran iguales, o bien la opuesta del peso mayor para neutralizarlo, como si esto equivaliera a «ayudar al pequeño» (tal como dijeron varios sujetos), o bien los alrededores de la opuesta del peso más débil, lo que equivale también a ayudarlo, pero contrabalanceando al mayor en lugar de anularlo. En el estadio III, finalmente, todas las cuestiones son resultas por coordinación de las direcciones y de las intensidades.

En la R 50 se volvieron a considerar estas cuestiones, pero facilitando su solución por manipulaciones dirigidas, en una situa-

ción en que los tres pesos son iguales, a igual distancia entre sí, y donde el sujeto puede hacer variar las intensidades y las direcciones. En el estadio I no hubo ningún progreso, salvo en lo que concierne a una cuestión preliminar (dos fuerzas iguales y opuestas). Por el contrario, los sujetos intermedios entre los niveles I (I B) y II comparan naturalmente éstas últimas, gracias a la práctica. En el estadio II asistimos a progresos parciales para las cuestiones del primer caso sin el segundo o viceversa, pero sin coordinación estable entre las direcciones e intensidades. Cierto número de sujetos intermedios entre los estadios II y III pasaron al estadio III, pero con cierta inestabilidad y ciertas regresiones parciales en el *test* posterior. Las dos R 51-52, debidas a V. Bang, proporcionan complementos útiles a esos hechos por medio de comparaciones efectuadas sobre elásticos en diferentes situaciones, especialmente bajo la forma de una honda en la cual la puntería al blanco y el lanzamiento del proyectil dependen visiblemente de los ángulos. Ahora bien, la actitud espontánea en el estadio I consiste simplemente en ubicar los hilos más atrás aún con un ángulo más obtuso (⌵ contra V) para tirar más lejos; algunos sujetos todavía a los 7 años prevén «más lejos porque más abierto» antes de comprobar «más lejos porque más apretado». Ninguno de los sujetos jóvenes piensa por sí mismo en cerrar el ángulo. Cuando las componentes son desiguales (un hilo más largo que el otro) la actitud inicial consiste en tirar «más fuerte». En el caso de dos elásticos juntos situados paralelamente (A y A') seguidos de un elástico único B, es B el que en el estadio I tiene más fuerza porque se estira más, y en el nivel II A, el sujeto aún prevé en primer lugar que, tirando todo, el índice que separa A y A' de B permanecerá «hacia el medio porque son del mismo tamaño», sin tener en cuenta las cantidades. Sin embargo, mientras que en el estadio I la fuerza está localizada únicamente del lado donde se tira, a partir del estadio II existe una distinción entre la fuerza de estiramiento y la de resistencia. Si se vuelve a tomar la honda poniendo de un lado dos elásticos paralelos A y A' y del otro uno solo B del mismo largo, al principio los sujetos del estadio I siguen percibiendo sólo la simetría, «va derecho», y es preciso esperar al nivel II B (9-10 años) para que la desigualdad plantee un problema desde la previsión y no únicamente después de la verificación. Sólo en el estadio III el problema puede ser dominado, especialmente si se opone a las paralelas A y A' un elástico B de doble longitud. En

una palabra, la técnica de los elásticos que se tiran a mano, y especialmente en el juego de la honda, no conduce a las facilidades que era dable esperar y da resultados que se reparten según los mismos estadios que la de los pesos suspendidos a hilos o a elásticos tirados por pesos.

Los carácteres generales de esas composiciones, en oposición a sus propiedades específicamente vectoriales, corresponden de una manera notable a los de las composiciones operatorias bajo sus formas comunes, y sobre todo a las composiciones de relaciones espaciales. La idea inicial (estadio I) es que cada fuerza existe de manera individual y autónoma, sin relación con las otras, como si se tratara de acciones aún no operatorias cuyas propiedades no dependen de ningún sistema, de ninguna clasificación, de ningún grupo de relaciones, es decir de acciones que pueden efectuarse independientemente las unas de las otras y únicamente en función de sus propias condiciones (oposiciones, etc.). En el estadio II hay, por el contrario, un comienzo de composiciones: aditividad al nivel II A, compensaciones en posiciones opuestas y resultante mediana por simetría para dos fuerzas iguales divergentes. Pero esas composiciones, dictadas por las regularidades operatorias más generales, se detienen allí y el sujeto no comprende ni el debilitamiento de los esfuerzos cuando fuerzas iguales se alejan ni la dirección de las resultantes cuando son desiguales. La razón de la incompresión de relaciones tan simples es nuevamente que las fuerzas no están aun relativizadas bajo la forma de operaciones agrupadas y permanecen, con excepción de las composiciones más elementales, en el estado de acciones que se efectúan por sí mismas con sus funciones propias (en el sentido de las funciones constituyentes pre-operatorias): efectivamente, en el estadio II no se considera que un peso pueda tirar y ser tirado a la vez, retener y ser retenido, etc. Y, sobre todo, la acción cesa de existir fuera de su desarrollo motor o cinemático, mientras que una operación no deja de desempeñar su papel, aun siendo anulada o compensada por otras. En efecto, componer dos fuerzas es suponer a la vez que cada una sigue actuando como si solamente ella estuviera

en juego, y que la interacción de ambas conduce a un resultado diferente al de la una o la otra aisladamente. Pues bien, allí reside precisamente el secreto de las composiciones operatorias en oposición a las acciones o a las funciones pre-operatorias que no expresan sus dependencias sino en el caso de cambio o de variación actuales. Existe por lo tanto un notable paralelo entre el desarrollo de las composiciones operatorias bajo su aspecto general y el de las composiciones de fuerzas, y es por eso que estas últimas desempeñan el papel de operaciones atribuidas a los objetos. Volveremos a considerar esto al estudiar el estadio III y las composiciones propiamente vectoriales.

Dos cosas merecen señalarse. En primer lugar vemos ahora por qué la síntesis constitutiva de la fuerza no (§ 10) podía consumarse sino en función de las composiciones de ésta última. Son ellas en efecto —y solamente ellas pueden lograrlo— quienes liberan esa noción de fuerza de sus lazos con los caracteres indiferenciados de la acción (cuyas limitaciones se imponen aún al nivel II B) y quienes, en el estadio III, constituyen una operación o un operador propiamente dichos.

Cabe señalar, por otra parte, las relaciones bastante estrechas que existen entre las etapas de esta composición de fuerzas y lo que hemos visto en § 9 respecto de las direcciones de los movimientos consecutivos a los empujes, tracciones o choques, es decir a las direcciones, no de las fuerzas, sino de los movimientos que les son propios. Se ha señalado en el estadio I una primacía de la dirección del proyector, que el objeto pasivo se limita a seguir, sin considerar el punto en que es tocado: volvemos, pues, a encontrar la idea inicial de una independencia de la fuerza activa que no debe tener en cuenta más condiciones que las propias. Asistimos luego a una diferenciación progresiva de las direcciones, primero sin coordinación de las rotaciones y traslaciones, luego progresando al nivel II B al construirse un sistema de referencias. Pero sólo en el estadio III, como en las situaciones presentes, los problemas se resuelven considerando dos sistemas de referencias a la vez y las relaciones de acción y reacción.

La cuestión que nos falta resolver es la de comprender por qué es preciso esperar el estadio III para que el sujeto pueda alcanzar composiciones vectoriales tan elementales como la de encontrar la resultante de dos fuerzas desiguales y divergentes. Recordemos en primer lugar que la utilización de diagonales está implícitamente comprendida desde el comienzo del estadio II, con la construcción de tablas de doble entrada o matrices, y lo está explícitamente al nivel II B con los sistemas de coordenadas naturales.

Al nivel II A el sujeto ya logra espontáneamente construir una matriz de dos dimensiones para expresar el producto cartesiano de dos conjuntos de relaciones: por ejemplo, para ordenar hojas según sus tamaños y colores cada vez más oscuros construirá una tabla de doble entrada de tal manera que los tamaños se clasifiquen de izquierda a derecha y los colores de arriba hacia abajo; en ese caso la relación entre dos hojas, una de las cuales es a la vez más grande y más oscura que la otra, se lee en diagonal o según una línea oblicua que une 2 compartimentos que no pertenecen ni a la misma columna ni a la misma fila. Cuando se trata de relaciones espaciales en un sistema rectangular de coordenadas ocurre *a fortiori* lo mismo y por lo tanto el sujeto ya no tiene dificultades para encontrar una dirección intermedia entre otras dos cuando éstas son divergentes.

Pero en la representación gráfica usual de los vectores interviene además una convención que podría parecer inútil recordar, ya que de ningún modo pedimos a los sujetos de nuestras experiencias que se refieran a la misma, y menos aún utilizar conocimientos escolares: a saber, representar una fuerza de mayor intensidad por un trazo de longitud proporcional a la misma. Ahora bien, hay en esto mucho más que una convención: existe la exigencia, para comparar direcciones e intensidades, de encontrar, no solamente un lenguaje común, sino también propiedades homogéneas. En ese caso, si la dirección responde a la pregunta «adónde va el objeto» desplazado por la fuerza (por ejemplo, el indicador tirado por el paso de las R 44 o 17), la intensidad corresponde a la

pregunta «hasta dónde va». La operación fundamental de la adición de dos vectores (⊕) por oposición a la adición por escala o numérica (+) consiste pues: 1) En representar los *trayectos* que efectuarían los móviles animados por cada una de las dos fuerzas como si sólo ella estuviera en juego; 2) En imaginar esos trayectos con sus dos caracteres inseparables de dirección y de longitud; 3) agregar uno al otro ∠ en ⌐ o _/ para unir los dos extremos (gran diagonal) o, de manera más simple, en unir sus extremidades ∠ tomando por resultante el punto medio de esa pequeña diagonal; dicho de otra manera, en reunir los dos trayectos en uno solo, teniendo en cuenta sus longitudes y no únicamente sus direcciones.

Se ve entonces inmediatamente que la constitución y la composición de los vectores presenta el mismo carácter central que las de las operaciones en general, como lo dijimos anteriormente al oponer la composición de las fuerzas a la de acciones cualesquiera: consiste en considerar cada componente como si continuara actuando con sus propiedades, pero integrándose a una totalidad cuyas propiedades son diferentes y nuevas. Pero, aunque es fácil, en una adición del tipo $5 + 7 = 12$, comprender que 5 y 7 están siempre presentes[1] dentro de 15, lo es mucho menos cuando se trata de dos trayectos que producen un tercero que ya no tiene ni las mismas longitudes, ni las mismas direcciones que las de los componentes.

Aquí interviene la necesidad de recurrir a las operaciones formales del estadio III y pueden considerarse las composiciones de fuerzas o de vectores como operaciones formales atribuidas a los objetos mismos. El primer carácter de esas operaciones hipotético-reductivas es, en efecto, el de poder tratar sobre lo posible, lo que permite en este caso particular poder considerar simultáneamente una fuerza que actúa como lo haría en estado de aislamiento y modificada en interacción con otras; o bien como si continuara actuando aún estando en

1. Por el contrario, es menos fácil comprender por qué, si se ha partido de 5 y 7, 12 es divisible por 2, 3, 4 y 6: de donde se deduce el carácter sintético de esta operación como de la causalidad, lo que Kant no se equivocaba tanto en sostener...

reposo; o también como si pudiera efectuar un trayecto de cierta longitud aunque de hecho, no lo haga. Ahora bien, esa «posibilidad» es de carácter físico y no concierne únicamente a las hipótesis del sujeto en cuanto asunciones aún no controladas: interviene en los «trabajos virtuales» de los estados de equilibrio como en toda composición. En segundo término, las operaciones formales son operaciones que se efectúan sobre operaciones y no permanecen en primera potencia: pues bien, ese es el caso de la fuerza cuando se convierte en síntesis, y lo es *a fortiori* de las composiciones precedentes. En tercer lugar, las operaciones formales comportan una combinatoria y un grupo de cuaternalidades, pero los vectores suponen un «conjunto de partes» con su naturaleza combinatoria y la coordinación de ambos sistemas de referencia implica una cuaternalidad (sin hablar, naturalmente, del grupo y del cuerpo que caracterizan el espacio vectorial, sobre el que podrían tratar muchas otras investigaciones psicogenéticas). En una palabra, todos los caracteres más generales de las operaciones formales se encuentran en estas composiciones y en tanto transformaciones efectuadas por los objetos y no únicamente aplicadas a éstos por el sujeto.

§ 12 / LINEALIDAD, PROPORCIONALIDAD Y DISTRIBUTIVIDAD

Hemos visto, al tratar la transitividad y las transmisiones (§ § 4-5), las compensaciones o la reversibilidad (§ 6), las composiciones aditivas (§ § 7-8) y las operaciones espaciales (§ 9), que se podía discernir un doble movimiento en el desarrollo de esas estructuras operatorias fundamentales: un movimiento de atribución, por un lado, que permite al sujeto, después de haber elaborado sus operaciones gracias a las abstracciones reflejas, reconocerlas en los objetos para someter a éstos a sus explicaciones causales, pero recíprocamente, y ya a partir de los estadios de formación, un conjunto de influencias de la causalidad sobre el sujeto, en la medida en que su expe-

riencia de los objetos le proporciona un conjunto de contenidos que favorecen dicha estructura operatoria. No es preciso decir que ese proceso, si es general, debe presentarse en el caso de las composiciones de fuerzas, pero hemos insistido en § § 10 y 11 únicamente en el aspecto de atribución, pues en un principio es difícil comprender cómo esas composiciones, visiblemente calcadas sobre las estructuras algebro-numéricas y geométricas de las que se toma el espacio vectorial, pueden contribuir al desarrollo espontáneo de las grandes estructuras operatorias. Pero si se recuerda el papel esencial de la linealidad y en particular de las proporciones y de la distributividad que obran constantemente en el juego de los vectores, no se puede menos que centrar sobre ellas la cuestión precedente, lo que origina los dos problemas siguientes. Por un lado, esas estructuras eminentemente lógico-matemáticas ¿se encuentran realmente entre las propiedades de los objetos o no serían más bien meras operaciones aplicadas por el sujeto para facilitar sus cálculos? Por otra parte, si *le* son efectivamente atribuidas, ¿cuál es entonces la posible contribución de las proporciones y distributividades físicas a la construcción psicogenética de esos esquemas operatorios por otra parte geométricos, algebraicos y lógicos?

Comenzando por las proporciones, numerosas investigaciones anteriores han demostrado que en todos esos campos la proporcionalidad cuantitativa sólo se alcanza en el estadio III, iniciándose por una forma cualitativa necesaria a la comprensión de la equivalencia de ambas relaciones y permitiendo una cuantificación ulterior que interviene entonces con mayor o menor rapidez. Era, pues, interesante averiguar si en una composición lineal de vectores como la multiplicación de vectores en juego en un estado de equilibrio por un mismo escalar que conserva el equilibrio, la comprensión al menos cualitativa sería más precoz o siempre al mismo nivel. La R 53 ha respondido a esta pregunta: en un dispositivo vertical en el que dos pesos desiguales $x > y$ hacen desviar un elástico según una dirección dada, se pregunta simplemente al sujeto después de haber modificado x, qué hay que agregar en y para conservar al misma dirección. En el estadio I no se obtiene ninguna solución. A nivel II A el sujeto agrega pesos iguales como

si al igualar los agregados nada fuera modificado, o bien procura aún obtener una equiparación final $(x + x') = (y + y')$ para impedir que aumente la desviación del elástico. A partir del nivel II B se observan como de costumbre conductas intermedias que revelan un incipiente sentimiento de proporcionalidad, pero conducen a realizaciones simplemente aditivas: desde el momento que $x > y$ el sujeto agrega más peso en x que en y, pero sin buscar el doble o el triple en x según que $Y' = 1$ o 2 y. O bien se limita a efectuar agregados iguales, pero intentando racionalmente conservar «la misma diferencia». Sólo en el estadio III interviene la composición multiplicativa con una argumentación que subraya el descubrimiento de la igualdad de relaciones: «Resultará el mismo peso, pero dos veces más» (11,1), etc.

En cuanto a la distributividad, ha sido estudiada en dos situaciones, una de estiramiento o causalidad propia al objeto (R 54), otra de trasvasamiento o acción causal del sujeto pero llegando a una composición de simples cantidades de materia (R 55). El estiramiento de un elástico presentaba un buen ejemplo de distributividad inherente al objeto y fácil de estudiar haciendo la comparación de los alargamientos, por ejemplo, de dos segmentos sucesivos a (proximal) y b (tirado en su extremo). Al nivel IA el segmento que se tira se alargará más que el otro. En IB, si $a > b$, dicha desigualdad se mantiene al efectuar el estiramiento: a crece más simplemente porque ya es mayor, etc. En el nivel II A, con la aparición de las transmisiones «semi-internas», se agrega a la acción de tirar la idea de una modificación del caucho en sí mismo, de manera que si $a > b$ los agregados $a' > b'$ están determinados por una especie de correlato cualitativo [1] (b «nunca llegará a alcanzar» a a), pero sin tener ninguna homogeneidad: a puede crecer proporcionalmente mucho más que b; etc. El nivel II B marca el comienzo de las construcciones multiplicativas pero que siguen siendo en parte indiferenciadas de las adiciones (por ejemplo para Ana a 9,5 el doble de 6 será aun 6 + 2, etc.), dicha indiferenciación relativa significa que el estiramiento está aún mal diferenciado de un desplazamiento, como si la acción de tirar equivaliera a desplazar las fronteras de los segmentos del elástico además de la dilatación del caucho. Finalmente, los sujetos del estadio III llegan a postular la homogeneidad de las transformaciones reduciéndolas

1. En el sentido de Spearman: a′ es a a como b′ es a b, pero sin cuantificación.

al simple estiramiento: si la totalidad es E y las partes a, b, c, etc., la idea inicial es, pues, que T(E)=T(a) + T(b) + T(c) + ..., lo que parece corresponder a la noción de transmisión mediata interna propia a dicho nivel y que el sujeto expresa cualitativamente al decir que el elástico se estirará en toda su longitud de la misma manera. Pero el problema se complica cuando pasa del principio al cálculo, ya que la distributividad $n(a + b) = na + nb$ es, en realidad, un juego de proporciones:

$$\frac{a + b}{n(a+b)} = \frac{a}{na} = \frac{b}{nb}$$

Ahora bien, si una proporción simple tal como: a:b::a':b' resulta accesible desde los comienzos del estadio III, esa relación distributiva es más compleja como proporción entre la totalidad y las partes, de tal modo que en un nivel III A el sujeto sigue afirmando aún la heterogeneidad de los coeficientes de estiramiento, pero por razones más complicadas afirma, por ejemplo, que el coeficiente del gran segmento debe ser superior al del pequeño, etc. Finalmente, en el nivel III B (11-12 años) se encuentra la solución con su simplicidad aparente («puesto que se estira de igual manera, es preciso que las dos partes aumenten al doble», o bien «no hay ninguna razón para que se extienda más en un lugar que en otro»), que oculta como siempre una gran complejidad operatoria.

Pero si la distributividad es tan difícil de dominar en el caso del elástico, es tal vez porque, causalmente, esa distribución homogénea de la perturbación es difícil de comprender [1]. Por consiguiente convendría examinar la distributividad de una simple composición de cantidades líquidas: verter agua en dos recipientes de formas diferentes A y B, luego trasvasar A y B en C, hacer una marca en C y doblar la cantidad (tomamos la notación 2C): preguntar entonces qué resultado dará el retorno del agua de 2C en A y en B (o en A+A' y B+B', siendo A' y B' vasos semejantes a A y a B). Los estadios obtenidos corresponden de una manera sorprendente a los que acabamos de considerar: no hay coordinación de transformaciones en el estadio I; comparaciones aditivas en el

1. Se ha efectuado sin embargo un control por medio de resortes cuyo estiramiento se debe a pesos diferentes suspendidos en sus extremidades: los resultados obtenidos han sido los mismos.

Nivel II A por comparaciones directas entre la cantidad 2 C y los vasos disponibles; principio de composición multiplicativa en II B, pero con indiferenciaciones variadas entre la adición y la multiplicación; éxito inmediato por la duplicación en el nivel III A, pero nuevo fracaso para el triple, luego éxito general en III B. Se ve de esta manera que no es la elasticidad lo que impedía la distributividad de la R 54, pues si los sujetos del estadio I no poseen aún la capacidad de conservar la cantidad de líquido trasvasado, lo que equivale a acordarle una capacidad de dilatación comparable a la elasticidad, la conservación ya no plantea problemas en el estadio II A, sin que eso implique la distributividad.

Esos hechos muestran de manera evidente el carácter de operaciones válidamente atribuidas al objeto (relativamente, por supuesto, a cierto nivel de análisis) que toman, una vez constituidas, la linealidad, la distributividad y la proporcionalidad, y según las tres significaciones complementarias habituales que conferimos al término atribución cuando está fundada. a) Se trata de propiedades de los objetos que existían en ellos (en cierta medida) antes de que el sujeto las descubriera; b) Para alcanzarlas el sujeto necesita construir operaciones aplicables a esos objetos, dicha construcción implica una parte necesaria de abstracciones reflexivas. Pero esta aplicación no consiste simplemente en tales casos en someter los objetos a estructuras libremente elegidas (como en el caso de aplicaciones sin atribuciones) y equivale además a establecer un isomorfismo entre las estructuras operatorias utilizadas y los caracteres objetivos descubiertos gracias a éstas, dicho isomorfismo asegura así una atribución y proporciona, por eso mismo, el principio de una explicación que satisface las condiciones de la asimilación intelectual, es decir de la comprensión de los objetos por el sujeto.

a) En lo que se refiere al primero de estos tres puntos[1], un hecho notable en los resultados precedentes es la obligación progresiva que los datos proporcionados por la experien-

1. Los desarrollos que siguen se deben a la estrecha colaboración de G. Henriques, R. Maier y especialmente de G. Cellerier, a quienes expreso mi agradecimiento.

cia imponen al sujeto a renunciar a sus interpretaciones iniciales, fundadas en el simple grupo de desplazamientos o en las composiciones numéricas aditivas que le son suficientes, para substituirlos con modelos de estiramiento o, en general, de composiciones multiplicativas. Cuando los sujetos del nivel II A y en parte II B de la R 53 agregan pesos iguales a pesos desiguales para que nada se modifique o para mantener «la misma diferencia», razonan como si los efectos de los pesos consistieran en trayectos o en desplazamientos a y b, tales que a + x y b + x conserven en sus puntos de llegada la misma separación que en los puntos de partida. Y cuando los niños de esos mismos niveles, en la R 54, ven esencialmente en el alargamiento del elástico el desplazamiento de los indicadores que marcan la frontera terminal de los segmentos o del todo, sustituyen igualmente a la noción de estiramiento la de trayectos susceptibles de ser compuestos por simples adiciones. Es, pues, una resistencia del objeto lo que están obligados a admitir, al descubrir en él, cuando fracasan las previsiones, propiedades imprevistas e irreductibles a la composición aditiva de naturaleza espacial o numérica. Se trata, en efecto, en esos dos casos, de superar bajo la presión de hechos objetivos los modelos de simples desplazamientos o de grupo aditivo de los enteros en provecho de un modelo causal más afinado y esto coincide con lo que hemos visto en (§ 9), a saber, la constante necesidad de relacionar la geometría de lo real a operadores dinámicos.

b) Pero, ¿cómo se efectúa el pasaje de las composiciones aditivas a las operaciones multiplicativas? La experiencia física nunca ha bastado por sí sola para asegurar la construcción de una multiplicación. Por el contrario, ésta procede por abstracción refleja a partir de la adición, puesto que multiplicar x por n es efectuar n adiciones de x, es decir $nx = (1^{er})\ x + (2.^{o})\ x + \ldots + (\text{enésima } x)$. Se trata, pues, de una operación recursiva del recuento que considera no ya conjuntos de objetos, sino las mismas acciones que el sujeto ejecuta sobre dichos conjuntos. La multiplicación consiste, pues, en una operación sobre operaciones, es decir en segunda potencia, lo que explica el ca-

rácter tardío de la comprensión de su significación efectiva respecto del verbalismo escolar, ya sea que dicha significación consista en atribuciones de composiciones multiplicativas al objeto o en utilizaciones puramente lógico-matemática. De la misma manera, las proporciones se extraen por abstracción reflexiva de la multiplicación, en cuanto igualdad de dos relaciones multiplicativas (divisiones). Finalmente, la distributividad $n(a + b) = na + nb$ reposa a su vez sobre las proporciones $(a + b) : n(a + b) :: a : na :: b : nb$.

c) Consideremos ahora los caracteres comunes de las atribuciones que comportan esas composiciones que dependen de la linealidad, de la distributividad o de la mera proporcionalidad. En términos generales, la distributividad caracteriza la manera según la cual se reparte una perturbación, es decir los efectos de una causalidad exterior, en un sistema físico en equilibrio cuyas relaciones y compulsiones determinan la dirección de las fuerzas. Tomemos como ejemplo una situación intermedia entre las de R 45 y 53: dos pesos desiguales a y b colgados de poleas fijas a la misma altura de una pared vertical, provocan la desviación de un peso c unido al hilo horizontal tendido entre ambas poleas, es decir entre a y b. En ese caso, el sistema está en equilibrio cuando $c = a + b$. Si se agrega entonces un peso c' en c, es preciso, para restablecer el equilibrio, agregar a' en a y b' en b, de manera que se obtengan $c + c' = (a + a') \oplus (b + b')$ y no $a' + b' = c'$. Pero, como las soluciones aditivas siguen siendo indeterminadas, la solución general será de la forma $kc = ka \oplus kb$, lo que implica a la vez la proporcionalidad y la distributividad.

Pero eso no es todo y el espacio vectorial implica la distributividad, en muchas de sus etapas. De una manera general se lo puede considerar como un grupo conmutativo (el de los vectores), provisto de operadores, cada uno de los cuales determina un automorfismo del grupo. El conjunto de los operadores (los escalares) comporta a su vez una estructura muy fuerte, la del cuerpo, pero es posible limitarse al conjunto de los enteros y contentarse con un anillo (en ese caso se dispone de un módulo en lugar del espacio vectorial en su

totalidad). La distributividad interviene entonces como una de las condiciones que una acción o transformación cualquiera debe cumplir para formar parte de esos operadores. Dichas condiciones son tres para una transformación φ que actúa sobre los elementos del grupo G de los vectores: 1) ya se trate de una aplicación (por consiguiente unívoca a la derecha); 2) ya sea que respete el cierre de G, es decir que transforme un vector en otro, sin salir de las fronteras del sistema; y 3) que esté coordinada con la operación + del grupo. En este último caso, se tiene $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$; φ y $\oplus$ son conmutativos el uno con respecto del otro.

El operador φ engendra entonces un automorfismo y tanto la distributividad como la linealidad son entonces casos particulares del morfismo cuando φ es, ya la multiplicación común, ya la de un vector por un escalar. Resulta claro entonces que, cuando los sujetos del estadio II que hemos considerado anteriormente tratan de expresar la ley del estiramiento de los segmentos del elástico por medio de una composición aditiva de desplazamientos, no alcanzan a constituir un operador vectorial: aún cuando su operación pueda satisfacer las condiciones 1) y 2), no consiguen formar un automorfismo, puesto que la adición por sí sola no es distributiva. Por el contrario, los sujetos del estadio III, al llegar a la proporcionalidad y a la distributividad, constituyen «atribuciones» válidas en el campo de las composiciones vectoriales.

Sin embargo, conviene recordar el problema recíproco. Se ha visto, por un lado, que la linealida, así como sus propiedades de proporcionalidad y de distributividad, forman parte de las propiedades físicas del objeto y son por lo tanto inherentes a las relaciones de causalidad en tanto ésta supera los observables para llegar a un sistema de conexiones necesarias. Se ha visto, por otra parte, cómo el sujeto llega a construir por abstracción reflexiva sus operaciones multiplicativas como operaciones aditivas a la segunda potencia, luego sus estructuras de proporcionalidad por igualación de las relaciones (es decir, nuevamente por relaciones de relaciones o relaciones a la segunda potencia), y finalmente sus estructuras de dis-

tributividad gracias a las proporciones $(a + b): n(a + b) = a : na = b : nb$. La construcción endógena de estas operaciones es lo que permite «atribuirlas» a lo real y alcanzar de esa manera algunas propiedades fundamentales de los objetos. Pero falta saber hasta qué punto esas aplicaciones acompañadas de atribuciones han contribuido, por lo menos en el curso de las últimas fases del desarrollo (nivel II B), y sobre todo en las fases de transición de II B a III A o de III A a III B), a la constitución de las operaciones del propio sujeto. El caso puede darse de dos maneras.

En primer lugar, como de costumbre, puede intervenir una acción de los contenidos sobre los formas en construcción, no porque éstas sean tomadas de aquéllos sino porque favorecen su elaboración imponiendo al sujeto la obligación de superar las formas de que dispone. Este caso se presenta de manera bastante clara en la evolución de las proporciones, cuando en el nivel II B se ven aparecer las soluciones intermedias entre la adición y la multiplicación: por una diferencia $a > b$ el sujeto llega así a concebir la idea de que los agregados a' y b' deben también respetar la relación $a' > b'$ sin quedarse en la igualdad $a' = b'$ y la adición de varias unidades constituye entonces el comienzo de un proceso multiplicativo entendido como adición de adiciones. Resulta claro que este tipo de sensación de la proporcionalidad que precede a su construcción efectiva se verá especialmente reforzado en las situaciones causales, aunque se lo observe en todos los campos en que interviene esta estructura: que la magnitud de los efectos es proporcional a la de las causas constituye practicamente una verdad analítica toda vez que se admita que la causalidad es algo más que una sucesión regular y que comporta una producción propiamente dicha. En el caso de la distributividad (experiencia del elástico de la R 54), la sustitución del concepto de estiramiento homogéneo al de desplazamiento impone reemplazar la noción de mera diferencia aditiva por la de coeficiente. Ahora bien, esta última no se refiere ya, como las diferencias, únicamente a las resultantes estáticas, sino a la propia trans-

formación (de a en na) y conduce de esta manera a las proporciones y a la distributividad.

Pero cuando se trata de estructuras complejas como las que examinamos en este momento, en oposición a las composiciones elementales examinadas anteriormente, aparece sin lugar a dudas un nuevo factor, aunque en principio ya estuviera en acción anteriormente. Cuando la estructura, que ya ha sido formada en ciertas situaciones, es aplicada a otras, dichas «aplicaciones» constituyen morfismos que enriquecen el campo de la estructura considerada. Y cuando la aplicación se prolonga en «atribuciones», dichos morfismos relacionan las estructuras internas del sujeto con las que descubre en la realidad y se construyen tantos morfismos diferentes como atribuciones distintas existan; en ese caso, las explicaciones causales o físicas del sujeto lo conducirán a modificaciones conceptuales tanto más ricas (y de una riqueza creciente al pasar de lo geométrico a lo cinemático y a lo dinámico) cuanto que podrían provocar diferenciaciones de la estructura considerada en sub-estructuras dotadas de caracteres propios. En particular, si nos referimos a los operadores vectoriales arriba descritos, se producirán composiciones entre dos o n operadores y Cellerier formula la hipótesis de un «semi-grupo de operadores» en la medida en que esa composición es asociativa.

De una manera general, resulta claro que las aplicaciones de una estructura operatoria constituyen uno de los factores de su desarrollo: y en el campo físico, el principal motor de las aplicaciones es la búsqueda de la propia atribución.

§ 13 / LA COMPOSICION DE LOS MOVIMIENTOS HETEROGENEOS Y EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Antes de pasar a considerar las reacciones, debemos preguntarnos en qué consiste la composición de dos movimientos no homogéneos en sus orígenes y direcciones, aunque cada

uno de ellos sea extremadamente simple. Este problema puede relacionarse con el de la coordinación compleja que supone la comprensión del movimiento ondulatorio.

La R 56 nos presenta un ejemplo particularmente simple de composición entre dos movimientos diferentes: se proyecta horizontalmente una pelota de ping-pong imprimiéndole un movimiento de rotación en sentido contrario, de tal modo que, después de recorrer un corto trayecto hacia adelante, retrocede. A partir de 5-6 años, hay sujetos que logran imitar la acción. Sin embargo, sólo a los 10-12 años (estadio III) se puede obtener una explicación completa. En el estadio I, el retroceso de la pelota se atribuye a su liviandad, su velocidad, etc., o a la mesa, al aire que la empuja, etc. En el estadio II se debe a los movimientos del encargado de la experiencia, pero se los describe globalmente sin efectuar una distinción neta de los dos movimientos como en el caso de los 10-11 años.

La R 57 trata sobre un problema análogo, pero en el que los dos movimientos son efectuados por dos objetos diferentes: un hilo se desarrolla bajo el efecto del descenso vertical de la bobina en que estaba arrollado; luego, la bobina sigue girando al terminar su trayectoria descendente, el hilo vuelve a arrollarse y la bobina sube nuevamente. Se trata del juego llamado «yo-yo», que la mayor parte de nuestros sujetos conocían y que los otros comenzaron a manipular antes de escuchar la explicación. Sin embargo, en el nivel I A consideran que todos los efectos se deben a los poderes de la acción en sí misma o de la bobina que quiere subir. A partir del nivel I B ya existe un principio de análisis objetivo, pero se confunden las acciones de la bobina y del hilo. En el estadio II la idea que predomina es que el impulso que la bobina toma al descender le permite subir, impulso que se atribuye sobre todo a la acción del sujeto y a la bobina por sí misma en II B). Sólo a los 11-12 se llega a una explicación correcta.

La R 58 trata sobre un juguete más complejo, el «bibip», en el que dos personajes situados uno delante del otro parecen caminar gracias a un doble balanceo a la vez transversal (izquierda derecha) y longitudinal (piernas) y a una leve tracción (un débil peso suspendido al borde de la mesa tira del primer personaje) hasta el momento en que el hilo llega a la posición vertical y se detiene. Se puede agregar una varita que sirva de contrapeso para facilitar la

percepción del movimiento lateral de los muñecos. En el estadio I todo se explica por la tracción, en el estadio II el balanceo transversal se considera —después de vacilar— necesario, pero sin descubrir el por qué: es así que, cuando se detiene la marcha, el sujeto empuja al segundo muñeco desde atrás en lugar de reactivar las oscilaciones laterales. En el estadio III, por el contrario, la coordinación de ambos movimientos es comprendida, lo mismo que la detención de los muñecos al borde de la mesa.

Lo que llama la atención, en R 56 y 57 es que el sujeto no logra obtener informaciones suficientes a través de su propia acción, en un caso imita lo que ve sin comprender el por qué (pelota), en el otro sobrestima el papel de los movimientos de sacudida que cree deber realizar en lugar de limitarse a una simple suspensión (yo-yo). El resultado es que la coordinación de los dos movimientos en juego es tan difícil de obtener como en la situación más compleja de la R 58. La razón es, evidentemente, que se trata de coordinar dos movimientos heterogéneos. Se podría pensar al respecto en una multiplicación, en el sentido de un producto lógico o cualitativo (clasificar u ordenar en series según dos criterios «a la vez»), en oposición a las multiplicaciones cuantificadas o numéricas. Pero si la multiplicación de las cantidades no se comprende sino mucho más tarde que la adición de éstas, la de las clases o de las relaciones en productos cartesianos o matrices de doble o triple entrada no es más difícil que las composiciones aditivas. ¿Por qué entonces en el caso de movimientos tan conocidos como la traslación o la rotación de una pelota en la R 56, o el descenso de una bobina y el movimiento de un hilo que se vuelve a arrollar en la (R 57), la composición resulta casi tan difícil como en las tracciones y balanceos de la R 58? Es que en el caso de dos clases, por ejemplo, tales como x e y con sus complementarios x' e y', las cuatro asociaciones multiplicativas xy, xy', x'y y x'y', son homogéneas en el sentido de que «x no y» se construye en simetría respecto de «no x y». En el caso de dos movimientos diferentes, las relaciones son más complejas: en el caso de la pelota de ping-pong la rotación se compone con la traslación directa no como

una operación inversa, sino como una especie de recíproca que la compensa progresivamente antes de predominar sobre ella: estamos, pues, más cerca de un grupo de cuaternalidad con coordinación de las inversas y las recíprocas que en el caso de la matriz de las clases donde el pasaje de un casillero al otro depende de una cuaternalidad elemental sin esa doble reversibilidad. Lo mismo ocurre en el caso de la bobina, el movimiento descendente y el ascendente no guardan la misma relación con el hilo, puesto que el descenso provoca el desarrollo del hilo, mientras que si se sigue haciendo girar la bobina, ésta vuelve a arrollarlo y es tirada por él hacia arriba. En el caso del «bibip», el balanceo lateral permite la tracción horizontal, pero cuando ésta cesa termina el balanceo.

En una palabra, estamos en presencia de interacciones complejas, sin reglas simples de composición y con una mezcla de acciones y reacciones cuya forma general será examinada en el párrafo siguiente. Dicha complejidad se presenta asimismo en el caso del movimiento ondulatorio que ha sido estudiado bajo diferentes formas:

La R 59 observó las ondulaciones de un largo resorte (un *slinky*) de 3-4 m. o de una cuerda, cuya extremidad libre es sacudida por el niño que comprueba la propagación de la onda hasta que regresa al punto de partida. Al nivel IA, el niño ve en el resorte una especie de «bola» que circula, y al nivel IB, un segmento de resorte o de la cuerda que circula bajo el efecto de un empuje (y no a causa de un tironeo). En el estadio II, un anillo no puede circular independientemente de los otros, pero el sujeto sigue buscando en la propagación de la onda una simple traslación: la de un ruido, una luz, del aire, etc. Es sólo hacia los 10-11 años (estadio III) que el doble movimiento es bien analizado, de la onda por un lado, y del ascenso y descenso de los segmentos del objeto por otro lado.

La R 60 vuelve a considerar esos problemas a propósito de las pequeñas olas producidas por la caída de una gota de agua en un pequeño recipiente. Al nivel IA se considera que la misma gota se desplaza y se amplía formando ondulaciones. En el nivel IB, la gota se desplaza todavía hasta los bordes, pero asociándose a otras. En el estadio II (7-10 años y a menudo más) se limita a

empujar el agua a su alrededor formando olas que siguen concibiéndose como traslaciones. Y una vez más, solamente en el estadio III (11-12 años), la ondulación es comprendida.

La R 61 considera el ascenso del agua en un tubo helicoidal inclinado (Vaso de Arquímedes). Además de los movimientos del agua, es necesario prever si un anillo (pulsera de reloj) pasado alrededor de un anillo o un papel pegado sobre el vaso se desplazarán y cómo. En el nivel IA se considera que el líquido y el anillo giran y suben con la espiral en un movimiento general que abarca el continente y el contenido: la lectura de la experiencia nò desengaña en absoluta al sujeto. En el nivel IB ocurre lo mismo, pero se empieza a ver que el anillo se desliza hacia abajo. En el estadio II, el tubo deja de avanzar, pero el agua sube sin que el sujeto logre comprender que, de hecho, baja cada vez, pasando de una vuelta a la siguiente: es entonces empujada por el aire, por el impulso debido a la rotación, etc. Finalmente, a partir de los 11 años (estadio III) los movimientos son correctamente analizados.

Podemos apreciar la coherencia de estos hechos con todos aquellos que ya nos han mostrado las dificultades de composición de las direcciones. Las preguntas planteadas en R 56, 57 y 58 solo podían resolverse tarde, puesto que comportaban operaciones sobre operaciones y se trataba de coordinar movimientos heterogéneos. En el caso de la preparación ondulatoria ocurre algo más, ya que uno de los movimientos consiste en una alternativa de ascensos y descensos en el mismo lugar de partes o partículas del objeto (anillos o gotas), mientras que el otro (pulsaciones) consiste en desplazar no ya esas mismas partículas (como lo creían los sujetos del estadio I en R 59 y 60), sino su movimiento de ascensos y descensos alternados, transmitiéndolo únicamente a las partículas siguientes: por lo tanto existe allí una transmisión de movimiento, pero de un tipo muy especial, ya que los movimientos transmitidos tienen una dirección perpendicular a la de la transmisión en sí misma. Por consiguiente es absolutamente normal que dicha trasmisión a la segunda potencia no sea comprendida antes de llegar al estadio de las transmisiones puramente internas (ver el § 4), pero es notable que ya pueda serlo en ese estadio,

puesto que se trata de una especie de movimiento de movimientos.

De hecho el problema se resuelve, como en el caso de pares de movimientos heterogéneos examinados al principio de este párrafo, por un sistema de cuaternalidad cuyos elementos observables son los siguientes: en lo que se refiere a las partes del objeto, su ascenso (a) ↑ y su descenso (↓), y para las sinusoides de las pulsaciones su acenso (c) ↗ y su descenso (d) ↘. Volvemos a encontrar esos cuatro componentes en el tubo helicoidal de la R 60, pero bajo la condición, además, de coordinar ambos sistemas de referencia interna y externa. Existe, pues, una estructura que veremos a continuación bajo su forma más general al considerar la acción y la reacción.

§ 14 / ACCION Y REACCION Y RECIPROCIDADES

La comprensión de las relaciones causales comporta necesariamente cierta reciprocidad entre lo que hacen los objetos activos y pasivos. La noción central es por cierto la de transmisión, concebida a la vez como fuente de producción (modificación al menos cinemática del objeto pasivo) y de conservación relativa (puesto que algún movimiento, etc..., se transmite sin desaparecer). Además, si hay transmisión, lo que gana el objeto pasivo B es perdido por el móvil activo A, lo que, en caso de igualdad de forma y de cantidad de materia entre ellos, no implica aún reciprocidad, sino bajo sus aspectos de equivalencia entre ganancias y pérdidas. Por el contrario, desde el momento en que hay desigualdad se presenta el problema: si B es más pesado que A, la mitad de los sujetos del nivel IB (5-6 años) admiten ya que el peso de B disminuye la acción de A, mientras que para los otros el peso de B refuerza el de A y B irá más lejos de lo que iría si los pesos fueran iguales. Vemos que precozmente ya interviene la noción de resistencia, bajo la forma de un simple freno; dicha noción se impone cada vez más en el estadio II. Pero estamos aún muy lejos de la reciprocidad completa expresada para la tercera ley de Newton.

En efecto, en la noción de reacción intervienen dos nuevas propiedades bien diferenciadas de las de simple resistencia actuando como generadora de un freno: la igualdad en intensidad de la reacción y de la acción y la oposición de las direcciones, por lo tanto un aspecto vectorial, no explícito en el siglo XVII (las leyes del choque de Descartes son casi todas parcialmente erróneas por faltar esta consideración)[1], pero implícitamente presente en esta tercera ley. Ahora conviene examinar la formación de esa estructura de acción y de reacción, verificar sus relaciones con las composiciones vectoriales y averiguar respecto de qué operaciones constituye la atribución, lo cual nos llevará a analizar otras formas de reciprocidades.

La R 62 consideró las acciones y las reacciones en caso de simple empuje: el adulto y el niño hunden cada uno una misma moneda en un bloque de pasta de modelar, la cuestión trata simplemente sobre la profundidad de ambos incrustamientos. En el nivel IA el sujeto se limita a considerar las fuerzas de los empujes sin tener en cuenta las resistencias ni la relación entre los incrustamientos y las fuerzas indicadas: «Usted apoya muy fuerte y yo menos fuerte» dice Flo a la edad de 4,0, por consiguiente los hundimientos serán «los dos iguales». Al nivel IB (funciones constituyentes), el hundimiento es función de la fuerza de empuje; solamente existe una referencia a la acción de «retener», en caso de formularse una pregunta sugestiva. Al nivel II A se ven aparecer los empujes y rechazos, lo que concuerda con la incipiente reversibilidad operatoria, pero como si éstos fueran sucesivos y no simultáneos o presentaran series de desigualdades incorrectas. Se trata de reciprocidades simultáneas que los sujetos del nivel II B tratan de alcanzar, pero teniendo a menudo la idea propia a las transmisiones mediatas semi-internas y semi-externas del estadio II, en el sentido en que los empujes y rechazos hacen avanzar al bloque y que, de esa manera, cuando uno de los sujetos rechaza al otro favorece la penetración en el sentido opuesto. Finalmente, en el estadio III, se llega a la comprensión de la igualdad de los hundimientos porque «cuando usted empujaba yo retenía y cuando yo empujaba usted retenía» simultáneamente y «eso da la misma fuerza», porque a un

1. Sin mencionar la ausencia de una distinción clara entre la energía cinética y la cantidad de movimiento.

empuje más fuerte del adulto corresponde una retención más fuerte del niño y a un empuje más débil de éste último corresponde una reacción más débil. De igual manera, en la acción en que un niño empuja a un adulto, estando los dos sobre patines (pero sin plantear la cuestión de las velocidades, etc.), los sujetos del estadio III preven y comprenden su retroceso: «es el efecto contrario», «es la fuerza y el retroceso», «es como el principio de los cañones», etc., y, con un revólver lanza-flechas: «el fusil retrocede cuando la bala sale», etc.

La R 64 ha estudiado el rebote en sí mismo, en el caso de una pelota de caucho que se deja caer al suelo. Durante el estadio I, la pelota vuelve a subir porque se la hace subir y también porque posee el poder de hacerlo (está «hecha para eso», «es redonda por todos lados»). En el estadio II encontramos tres tipos de respuestas: a) Vuelve a subir porque es pesada, lo cual favorece su descenso, «toma impulso en el suelo y luego rebota»; b) vuelve a subir porque es liviana, eso ayuda a que vuelva a subir; c) Es «flexible», elástica, etc., pero se trata aun de una tautología sin explicación. En efecto, cuando cubrimos la pelota de talco, lo que permite ver su aplastamiento sobre la mesa, los sujetos del estadio II preven que éste será mayor cuando la pelota cae de más alto, pero consideran que dificulta su ascenso y no lo contrario. Tan sólo en el estadio III el rebote se explica por una reacción comprendida como una tendencia de la pelota a recuperar su forma, tendencia que resulta más fuerte cuando la deformación por aplastamiento ha sido mayor.

Los diferentes hechos convergen, pues para mostrarnos que la noción de una reacción orientada en sentido inverso al de la acción (por oposición a una resistencia concebida como un simple freno) sólo es elaborado en el estadio III (hacia los 11-12 años), al nivel en el que se componen las fuerzas de una manera vectorial. Dicho sincronismo se ve reforzado por el examen de las reacciones en los líquidos.

Una antigua investigación sobre una prensa hidráulica, con B. Inhelder, ya había permitido verificarlo. El dispositivo consistía en un tubo en |_|, en el que un pistón situado a la derecha podía ser cargado con un peso, mientras que el nivel del agua a la izquierda no dependía únicamente de ese peso sino también de la

densidad del líquido, según se tratara de agua pura, de alcohol o de glicerina diluida. Una vez más, tan sólo en el estadio III se logra comprender que el líquido ejerce una reacción en el sentido inverso a los pesos del pistón, mientras que, hasta ese momento, la única dirección considerada era la del empuje como si el peso del líquido actuara en el mismo sentido que el del pistón.

La R 65 ha vuelto a considerar el problema bajo una forma más sencilla: en dos tubos verticales de 50 × 10 cm. llenos de agua (o de alcohol) se hacen bajar pequeñas fichas de igual peso y volumen, luego de peso diferente e igual volumen, de volúmenes diferentes e igual peso, y finalmente de volúmenes y pesos diferentes, pero con compensación. Las preguntas trataban sobre las velocidades de caída (bastante lentas para las comparaciones). En lo que se refiere al peso, los sujetos del estadio I no le atribuyen ningún papel o bien piensan que la ligereza de la ficha favorece su descenso, lo mismo que su pesadez. En el estadio II la caída se debe al peso absoluto, mientras que en el estadio III éste está coordinado con el volumen. En cuanto a éste último, en un principio se lo despreció en beneficio del peso, o se lo identifica al peso como si la pesadez estuviera en función del grosor; en caso de contradicción con los hechos, se llega a compromisos según los cuales, por ejemplo, la pequeña ficha «tiene algo grande adentro» (Sti a 6,8). En el estadio II es progresivamente disociado y concebido como causa de lentitud, pero por simple freno: «frena», «el hecho de ser grande retiene», etc. Finalmente en el estadio III, y especialmente al efectuar comparaciones entre el alcohol y el agua, el volumen desencadena la «presión» del agua orientada en sentido contrario al descenso de la ficha: «la presión... sube» (Joy 12,10), etc.

Esta comprensión en tantos campos diferentes de una reacción orientada en sentido contrario al de la acción y de igual intensidad, supone, pues, las direcciones vectoriales, y es ésa la primera razón de que se manifieste sólo en el estadio III. Pero no es única, pues falta comprender la formación de esa reacción tan pronto como hay acción, y sobre todo el hecho de que esas dos fuerzas se opongan sin anularse. En efecto, una oposición de direcciones sin anulación constituye una relación operatoria diferente a la inversión que es una negación, es decir una anulación, y corresponde a una reciprocidad: si la composi-

ción de una operación con su inversa equivale a anularla (+ A — A = 0), el producto de dos recíprocas (en este caso dos fuerzas equivalentes y opuestas, aun cuando actúan sobre puntos diferentes) consiste en una compensación, es decir en una anulación de las diferencias y no de los términos en sí mismos. Ahora bien, si la reciprocidad interviene desde los 7-8 años en las operaciones de relaciones, al mismo tiempo que la inversión para las operaciones de clases, la nueva condición que debe cumplir la composición de las acciones y reacciones es la de utilizar simultáneamente las inversiones y reciprocidades y componerlas entre sí, es decir construir un sistema que tenga dos reversibilidades; puesto que la acción puede dar lugar a aumentos (+) o a disminuciones (—), la reacción también puede hacerlo, pero además, toda variación de la primera provoca una reciprocidad de la segunda. Interviene aquí una estructura isomorfa a aquélla que, en el campo de las operaciones interproposicionales del sujeto constituye un grupo INCR, y dicha composición no es posible sino en el estadio III donde interviene el «conjunto de las partes» (que es a la vez combinatorio y fuente de las operaciones proposicionales, es decir del grupo INCR).

Pero en el caso de las acciones y reacciones causales, esa estructura operatoria es naturalmente «atribuida» a los objetos (y aún con una matriz de nueve casilleros según los valores +, = y — para cada una de las dos dimensiones). Esa «atribución» es por otra parte tan evidente que el lógico Parson, en su crítica de nuestro trabajo con B. Inhelder, en el que ya está desarrollada la aplicación de esta estructura a la inducción de las leyes físicas, creyó que describíamos así los hechos físicos en sí mismos sin notar que se trataba de operaciones del sujeto. En realidad, en la investigación de las leyes, éste último se limita a la aplicación de sus propias operaciones, mientras que con la explicación causal la atribución se torna necesaria para «comprender» los procedimientos que están en juego.

El papel de la reciprocidad no se impone solamente en esos sistemas muy generales de acciones y reacciones; inter-

viene también en los casos de causalidad circular o de feedbacks:

La R 66 trata sobre un ejemplo de feedback positivo en el que una barra vertical que sirve de balancín permite, al inclinarse, el paso de una bolita tras otra a lo largo de una bajada en zigzag: cada bolita al terminar su descenso choca contra la parte inferior del balancín, que ha recuperado entre tanto su posición vertical, lo que lo inclina y abre el camino a una nueva bolita en la parte superior del dispositivo. Si bien en el nivel IA no interviene aún la causalidad explícita, los niños logran, por el contrario, a partir del nivel IB, comprender la relación que existe entre el choque de la bolita contra la parte inferior de la barra y la apertura que se produce arriba y «deja pasar» la bolita siguiente. Pero el sujeto no ve en eso más que un proceso en sentido único y no se pregunta por qué el balancín recupera entre dos turnos su posición vertical. Durante el estadio II, el progreso sólo se nota en la necesidad de la acción de la bolita en la parte baja del trayecto que desplaza «forzosamente» la parte superior de la barra con efecto retroactivo sobre la bola siguiente. Sin embargo, en el nivel II B ciertos sujetos comprueban que el balancín «se mueve» sin cesar y se preguntan «por qué gira». Pero sólo en el estadio III se percibe el balanceo y el regreso de la barra que «vuelve a su lugar» se comprende como la condición necesaria para cerrar el circuito. Por lo tanto es sólo a ese nivel cuando se comprende la reciprocidad en una situación de causalidad semi-circular en la cual, sin embargo, todo está a la vista.

Un circuito algo más complicado se analiza en la R 67: una caja provista de dos orificios A y B es presentada al niño, se pone cerca de A (al exterior) un producto fumígeno. El sujeto comprueba que el humo de ese producto se eleva por sí mismo, como cualquier otro. Bajo el orificio B se encuentra (en la caja) una candela que se procede a encender: en ese caso el aire caliente pasa por B, crea un vacío de aire en la caja y el humo exterior entra en A y se une al aire calentado por la candela, de manera que sale por B, según un circuito no completo, pero suficiente para plantear un problema. En el estadio I el fenómeno se explica sin más por los poderes y las intenciones del humo. En el nivel II A, el sujeto busca dos explicaciones independientes para los procesos en A y en B. En el nivel II B se procura encontrar la unidad, pero sin lograrlo completamente y el sujeto termina por encontrar compro-

misos tales como «el color azul de la llama atrae al humo, el amarillo la rechaza». Finalmente hacia los 11-12 años (estadio III) se descubre el sistema de conjunto, incluyendo la atracción de aire producida por el aire caliente que sube en B.

Los hechos de la R 66 resultan interesantes ya que todo, en los elementos del circuito, es fácil de explicar (los movimientos de un balancín son comprendidos precozmente) y, sin embargo, el circuito como tal sólo se descubre muy tarde. Sin embargo, el carácter retroactivo de la acción de una bolita sobre la siguiente se percibe a partir del nivel IB, a pesar de que la siguiente se pone en marcha mucho después que la primera en lo alto del dispositivo, mientras que la primera ya ha rodado y sale del circuito por la parte inferior en el momento en que actúa sobre la segunda. Pero esa acción efectuada por medio de la barra se comprende como si se tratara de tirar un móvil a 50 cm. por medio de un largo hilo. Por el contrario, el retorno del balancín a su posición vertical, aunque es perfectamente comprensible, desempeña en el circuito un papel comparable al de una reacción y eso constituye un problema. Si llamamos x y x' a la inclinación del balancín, abajo (x) o arriba (x'), y denominamos y o y' al paso de una bolita, ya sea abajo (y' al inclinar el balancín), ya sea arriba (y como consecuencia de esa inclinación), tenemos en efecto las cuatro funciones siguientes:

a) $x' = f(y')$; b) $y = f(x)$; c) $\overline{y} = f(\overline{x})$ y d) $\overline{x'} = f(\overline{y'})$

la función d interviene cuando la primera bolita desciende antes de empujar la barra (es decir que todavía no pasa).

Ahora bien, si las funciones a y b ya están descubiertas en el estadio II y aún parcialmente en el nivel IB, estas no bastan para cerrar el circuito, aunque constituyen una especie de reciprocidad por permutación de los términos. Para cerrar el circuito se necesita una coordinación de las reciprocidades con las inversiones, es decir el agregado de las funciones d y c, que implican el retorno de la barra a la vertical y no son así

explicadas espontáneamente hasta el estadio III. En efecto, la composición de las cuatro funciones en juego constituye un grupo de cuaternalidad: si b es la R de a, entonces c es la NR y por lo tanto la correlativa C de A, y de que es la N de a es pues por consiguiente su RC. Encontramos así la misma estructura que en los procesos de acción y de reacción, y no es por consiguiente causal que haya que aguardar al estadio III para que el sistema total sea bien explicado, aunque cada uno de sus elementos sea en sí mismo comprensible.

En cuanto al circuito de la R 67, es más complejo puesto que el sujeto no ve ni el calor que sube en B, ni el consiguiente vacío de aire, ni por lo tanto la acción de la combustión en B sobre el humo en A al atraer el aire. Además, y sobre todo, se trata de invertir el orden aparente de sucesión puesto que la fuente del circuito está en B y no en A, como parece a simple vista. Sin embargo, los cuatro procesos del ascenso del aire en B, de su acción sobre A, del descenso del humo en A y de su nuevo ascenso en B son coordinados al mismo nivel de 11 años que los de la R 66.

§ 15 / LOS PRINCIPIOS DE RAZON SUFICIENTE Y LA INERCIA

Hemos visto hasta ahora que se atribuyen a los objetos las grandes formas de composición operatoria que son la transitividad (§ § 4-5), la reversibilidad (§ 6), la aditividad (§ § 7-8), la multiplicatividad (§ § 9-12), y la reciprocidad (§ 14). Pero interviene además en las composiciones propias a las operaciones del sujeto un principio regulador cuyas aplicaciones explícitas son tardías y se refieren sobre todo a las deducciones formuladas, pero cuya significación implícita es más precoz y se generaliza a partir del estadio III de los razonamientos hipotético-deductivos: es el principio de razón suficiente. Puede presentarse bajo cuatro formas según se hable únicamente de «razón» (*nil est sine ratione,* decía Leibniz) o se insista sobre su cualidad «suficiente», y según se exprese bajo sus as-

pectos positivos o negativos. La primera de esas formas (IA) equivale a decir que todo estado o todo cambio presenta cierto número de condiciones necesarias, en negativo (IB), que si una no se cumple el efecto no se produce: *sublata causa, tollitur effectus*. La tercera y cuarta formas son más interesantes: para que haya producción del estado o del cambio resulta suficiente reunir cierto número de condiciones (II A); de donde provienen entonces dos consecuencias en negativo, según se ubique uno de este o aquel lado de las fronteras de esa totalidad de condiciones. En primer lugar, si no se cumplen todas, no hay producción de efecto, lo que nos devuelve a I B, pero, en segundo lugar (II B), no hay razón para que intervengan otras, además de las suficientes.

De la manera como han sido expresados se desprende que ese o esos principios de razón suficiente no son sino reguladores, a la manera de los principios formales de la lógica. Es así que el principio de contradicción nos prohibe contradecirnos, pero no nos informa acerca de lo que es o no es contradictorio: sabemos pues únicamente que a es incompatible con $\bar{a}$ (es decir a $\bar{a}$), pero eso no nos dice si b implica $\bar{a}$ o si es compatible con a, y corresponde a las inferencias procedentes de las definiciones detalladas dirimir la cuestión. De igual modo, en los principios de razón suficiente: Aristóteles, al admitir que todo movimiento depende de un «motor externo» sacaba la conclusión de que, separado de éste, ya no hay razón para que un móvil conserve su movimiento, aun en línea recta (el «motor interno» no resulta «suficiente»). Por el contrario, considerando el movimiento inercial como un estado estable, Galileo y Descartes concluían que, exceptuando las resistencias exteriores, no había ninguna razón para que ese movimiento terminara.

Sin embargo, a pesar de su carácter meramente regulador, esos principios de razón suficiente no son de naturaleza exclusivamente metodológica, sino que dan lugar a ciertas «atribuciones» a los mismos objetos, especialmente bajo la forma II B de la que Fermat y Maupertuis dedujeron los principios de

menor acción fundados el uno sobre la elección del mejor camino, etc., y el otro en una especie de economía natural de las cantidades de acción. Tales principios nos interesan bajo dos puntos de vista. En primer lugar, se aplican tanto a las estructuras operatorias como a las causales. Es así como una axiomática puede tener el propósito de descubrir las condiciones necesarias y suficientes de un sistema (por ejemplo, la lógica bivalente de las proposiciones) y en ese caso los axiomas, aunque siguen siendo distintos, deben ser reducidos al mínimo, sin que haya entre ellos redundancia (de donde se explica la reducción a cuatro de los cinco axiomas inicialmente postulados por Whitehead y Russell, uno de los cuales era inútil). En segundo lugar, los mismos principios pueden ser «atribuidos» a los objetos en sí mismos y revestir entonces una significación causal, pues, como ya lo decía Leibniz, «la causa en las cosas responde a la razón en las verdades». (*Nuevos ensayos,* IV, capítulo XVII, § 3).

Al respecto, la forma II B del principio puede dar lugar a dos clases de atribuciones. En primer lugar, tenemos los problemas relativos a los caminos recorridos o a los procesos temporales, como el camino óptico de Fermat, y que dependen de lo que hoy se llama «principios de extremum». Se trata en general de acciones mínimas (el camino más corto entre todos los caminos vecinos), pero en algunos casos máximas, especialmente en caso de probabilidad creciente. A menudo todavía se combinan los dos, como cuando el mínimo de energía potencial hacia el cual tiende un móvil en la parte inferior de una pendiente corresponde a un acrecentamiento de energía cinética durante la caída. En segundo lugar, se puede decir de una manera general que en estados estacionarios simétricos, como los que vamos a considerar, no hay razón de que un cambio se produzca, en tanto las simetrías constituyen razones de transformaciones. Finalmente, si se ha tratado en vano, desde Euler hasta Maxwell, de «explicar» el principio de inercia por la razón suficiente (se ha visto anteriormente que ésta no explica nada mientras no se precise de antemano lo que son las condiciones necesarias y suficientes que se en-

cuentran en juego en el proceso que se desea interpretar), parece por el contrario claro que, una vez reconocida la recta como el camino más corto y el movimiento rectilíneo y uniforme como un estado (y no un cambio momentáneo), la forma II B del principio impone su conservación.

Las R 68 y 69 nos han proporcionado ejemplos de *extremum*. En la R 68 se ha pedido prever y explicar la disposición de 1 a 19 bolitas que se ubican sucesivamente o de golpe en cantidad elevada. Una sacudida les hace luego tomar una hermosa forma regular en hileras rectas. En el estadio I la primera bola irá al medio y las otras a cualquier parte, o bien igualmente al medio (concebido en ese caso como una mediana) pero actuando cada una por su cuenta. En el estadio II se producen interacciones y la forma final se explica como la más estable, es decir que excluye todo nuevo desplazamiento. En el estadio III, finalmente, todas las bolitas tienden hacia el punto más bajo, es decir a una distancia mínima con respecto al centro, el mínimo de superficie y el máximo de densidad, las rectas se deben, entonces, al hecho de que «se ponen una contra otra: si no hay espacios, no pueden ubicarse sino en líneas (rectas)».

La R 69 utiliza un círculo que se ubica en un plato que contiene agua jabonosa: sobre la lámina de jabón que se forma en el arco se coloca un hilo anudado y cuando se pica la parte de la lámina interior del hilo éste toma la forma de un círculo perfecto. Después de la explicación se pregunta qué se obtendrá con un marco cuadrado. En el estadio I los sujetos atribuyen el círculo obtenido a los poderes del experimentador o del jabón, etc., y no suponen que al repetir el ensayo el círculo se reproducirá necesariamente. En el estadio II el círculo se debe a un agujero que se practica en la lámina de jabón o a las fuerzas interiores o exteriores que se ejercen de manera homogénea «desde todos los lados», lo que nos acerca a la noción de razón suficiente. En el estadio III se agrega la idea de maximalización: se dirige en todos los sentidos y forma un círculo... «Porque es allí donde hay más lugar» y algunos agregan que con otra forma «toma más cordón».

En una palabra, la forma perfecta de las perlas bajo el vidrio de reloj o del hilo en la lámina de jabón se deben a la igualdad de los efectos, no existiendo ninguna razón para que

uno predomine sobre los otros. Se trata aquí, por cierto, de formas de equilibrio y no de un camino más corto. Pero, por otra parte, el principio de las velocidades virtuales no se aleja del de razón suficiente, ya que se puede sostener que si dos trabajos virtuales se compensan es porque no hay razón (desigualdades o asimetrías) de que el uno prevalezca sobre el otro. Por otra parte, se ve que en los sujetos del estadio III, en estas investigaciones, la ausencia de desigualdades entre los efectos produce además nociones de *extremum*: la igualdad de los empujes llega a suprimir todo espacio perdido, por eso la superficie es mínima para un conjunto dado de perlas que se apretan, pero es máxima en el caso del hilo tenso que rodea a la lámina de jabón.

Podemos notar hasta qué punto estas explicaciones son a la vez racionales y mecanicistas, a pesar del finalismo que Max Planck deseaba atribuir al concepto de mínima acción, y esto en sujetos de 10-12 años cuyos conocimientos de física, pocos años atrás, estaban aún impregnados de sentido común aristotélico.

Por el contrario, el problema de la inercia es mucho más complejo, ya que para llegar a comprender que no hay razón para que un movimiento adquirido cambie de velocidad o de dirección en ausencia de toda nueva intervención de una fuerza exterior es preciso, por un lado, admitir que todo movimiento no rectilíneo cambia de dirección aun cuando sea circular, y, por otra parte, resistir al conjunto de hechos cotidianos aparentemente contrarios. Es así que con B. Inhelder hemos encontrado hace ya mucho tiempo que sólo ciertos sujetos de 13 a 15 años eran capaces de sostener que si la detención a de un móvil se debe a la fricción, a la resistencia del aire, etc.: es decir $a \supset b \vee c \vee d \vee \ldots$ la supresión de esas causas provoca la conservación del movimiento, es decir $\overline{b.c.d.} \ldots \supset \bar{a}$. Por el contrario, resulta interesante estudiar los progresos de la noción de inercia bajo la forma de conservaciones momentáneas, entre los estadios I a III B.

La R 70 procura saber: 1) de qué lado caerá el niño que está de

pie sobre una alfombra si se tira de ésta en una dirección dada, o 2) una muñeca de pie sobre un cartón; 3) dónde hay que ubicar un personaje dentro de un vagón para que no se caiga al producirse la partida; 4) qué ocurrirá con una bola que se encuentre en la parte trasera de un vagón en el momento en que éste emprenda la marcha, luego cuando se detenga; 5) ídem si la bola está ubicada en el medio. En el estadio I las cuestiones 1) y 2) no están mejor resueltas que las siguientes. En el estadio II lo están, incluyendo también en general la 3, pero las preguntas 4 y 5 originan una falsa y bastante sistemática previsión: la bola partirá al mismo tiempo que el vagón y en el mismo sentido que éste por transmisión inmediata de su movimiento (y sin que el sujeto sospeche que de esa manera la velocidad de la bola sería el doble de la del vagón). Finalmente en el estadio III los sujetos admiten que en el momento de la partida las bolas van en sentido contrario (y hasta quedan en su mismo lugar respecto de referencias exteriores) y que al detenerse heredan por transmisión el movimiento del vagón y parten hacia adelante.

La R 6, que ya hemos citado (§ 4), utiliza como dispositivo la rotación de una canaleta horizontal que se golpea cerca de uno de sus extremos: del lado que ha sido golpeado, la bola apoyada sobre la canaleta es proyectada hacia adelante, mientras que del otro lado una segunda bola cae verticalmente permaneciendo inmóvil por inercia sobre un soporte que se retira debajo de ella. Teniendo en cuenta únicamente esa segunda bola, comprobamos que en el estadio I el sujeto no hace ninguna distinción entre las dos situaciones, excepto que la bola stiuada más lejos del choque cae con menos fuerza. Al nivel IA, se considera aún que la bola no proyectada se dirige, sin embargo, en el sentido de la rotación, aunque el sujeto perciba claramente las diferencias de intensidad, aun atribuidas a la distancia a partir del punto de choque. El nivel II B se caracteriza por sus reacciones intermedias, el sujeto comprende por momentos que la segunda bola no es proyectada, pero falsea esa intuición por medio de consideraciones pseudodinámicas (vibraciones, etc.). En el nivel III A los sujetos llegan por tanteo a comprender el carácter pasivo de la caída de esta bola, pero no comprenden aún el papel del borde vertical de la canaleta, ni menos aún de su ausencia en la dirección en que cae la bola no proyectada. Finalmente, en el nivel III B se encuentra la solución justa a partir de las anticipaciones (incluyendo el papel del reborde).

La R 71, que se refiere a la fuerza centrífuga, ha proporcionado indicaciones sobre la dirección tangencial de la partida de móviles sobre un disco en rotación. En el estadio I las trayectorias siguen cualquier dirección, luego se orientan circularmente sobre el platillo sin previsión de caídas (lo cual es aún frecuente a los 7 años y más). En el estadio II se prevé la caída, pero la dirección de partida se prevé perpendicular al borde del platillo (aún para la cuarta o la tercera parte de los sujetos de 9-10 años, a veces mayores), hacia atrás o un poco hacia adelante. En el estadio III, finalmente, la dirección de partida es tangencial. Las cuestiones que tratan sobre un riel dispuesto como montaña rusa con partida obligatoria de una bola al encontrar una curva muy brusca, o en trayecto horizontal, pero con una vuelta en aguja, dan los mismos resultados.

Estos diversos hechos concuerdan en mostrar el carácter tardío de la comprensión de los procesos de inercia y es fácil comprender por qué. Admitir que una bola retrocede respecto de un soporte en movimiento, y permanece en su lugar con respecto a referencias exteriores, es a la vez resistir a las sugestiones de transmisión y coordinar dos sistemas de referencia. Por otra parte, la conservación de un movimiento rectilíneo y uniforme (sobre todo cuando se manifiesta después de la detención del soporte, como en la R 70) no es una conservación como cualquier otra, puesto que se refiere al movimiento como estado y no a propiedades estáticas: supone, pues, algo más que un juego de identidades aditivas (no quitar ni agregar nada), de reversibilidades o de compensaciones. Implica, como lo decían los sujetos arriba mencionados, un análisis de las causas de detención y la conclusión deductiva de que en su ausencia no hay razón para que el movimiento no continúe. En otras palabras, la conservación inercial del movimiento es sin duda la más inferencial de las relaciones causales y al mismo tiempo la más necesaria entre las estructuras operatorias atribuidas al objeto, porque, como el principio de razón suficiente del que es una expresión, constituye una condición previa para la coherencia real y a la vez para la inteligibilidad de los fenómenos.

§ 16 / EL «PESO» Y SUS COMPOSICIONES CON LAS MAGNITUDES ESPACIALES

El «peso» es tal vez la noción cuyo desarrollo resulta más complejo y más difícil de analizar en detalle. La razón es que este término abarca dos conceptos distinguidos por la física, pero que no lo son ni por el niño ni por el sentido común del adulto: el de masa o cantidad de materia y el de peso propiamente dicho, que es el resultado sobre la masa de la fuerza de gravedad orientada hacia el centro de la tierra. Pero ya la misma masa desempeña un papel dinámico activo en la composición de la fuerza $f=ma$, por consiguiente $m=f:a$ y un doble papel de resistencia: a la puesta en movimiento y a la detención del movimiento. En cuanto al peso, se lo considera a todos los niveles como una fuerza o, más precisamente, como un coeficiente de acción, pero no dirigido desde el principio hacia abajo, y puesto que no está diferenciado de la masa, se comprende la complejidad de los problemas que plantea al sujeto pero también al observador que trata de comprender lo que procura expresar el sujeto.

En grandes líneas, y conservando el término ambiguo de «pesos» para permanecer fiel al vocabulario de los niños, asistimos, como es lógico, a una sucesión de fases que pasan de la indiferenciación a diferenciaciones entre lo que llamaremos el peso-cantidad, o propiedad de un cuerpo, y el peso-acción, o manifestación de efectos dinámicos variados. En cuanto a éste último, su coordinación con el peso-cantidad no es posible sino a partir del momento en que el peso está compuesto con magnitudes espaciales: con el volumen en lo que se refiere a la densidad y a los modelos corpusculares que ésta supone, o en lo que se refiere a la flotación; con la superficie en lo que se refiere a la presión; con las longitudes o distancias en lo que se refiere al momento o al trabajo. En efecto, una vez con esas composiciones la dinámica del peso-acción comienza a estructurarse y a integrarse el peso-cantidad, mientras que aún en el nivel II B, que es el de la conservación del peso-cantidad, cuando se producen cambios de forma

del objeto, el sujeto se limita a compromisos según los cuales el peso permanece invariable pero «da» o «pesa», etc., de manera variable con acciones o aun posiciones diferentes. Solamente en el estadio III las composiciones de los pesos con las magnitudes espaciales se tornan posibles, porque suponen la construcción de relaciones, así como de operaciones vectoriales (combinando estas mismas fuerzas y direcciones, es decir relaciones espaciales), y también de proporciones, distributividad, etc., en resumen, un conjunto de operaciones sobre operaciones.

La R 72 considera el fluir del agua en tres caños, descendente, horizontal y ascendente, a partir de un recipiente, así como los movimientos de una bola sobre un plano inclinado. El peso no interviene para ésta sino en el nivel II A (se recordará que ocurría lo mismo con la regla que caía al borde de la mesa en la R 15, ver en § 6), mientras que para el agua lo hace en el nivel II B, antes del cual se la considera liviana. En el estadio I, se dice que baja porque es «fina», etc., y la bola porque rueda. En el nivel II A se agrega que la pendiente (hasta entonces considerada simplemente como la única vía libre) se convierte en fuente del impulso.

La R 16 que ya hemos visto en § 6, trata sobre la caída de los objetos alargados al borde de la mesa y sobre su equilibrio cuando se los ubica sobre un soporte cilíndrico, tal como se encuentran, o agregándoles pesos adheridos por medio de ventosas. En el estadio I el equilibrio se prevé sin referencia al peso, salvo cuando intervienen las ventosas, pero en ese caso sin comprensión del equilibrio: un sujeto de 6 años muestra, por ejemplo, con toda corrección, la repartición simétrica de los pesos de las partes del círculo cuando se le pregunta, pero no logra ubicar las ventosas para mantener el equilibrio. Al nivel II A, el peso se invoca constantemente y en el nivel II B varias particiones son posibles para un mismo objeto, lo que conduce en el estadio III a la comprensión del centro de gravedad (punto de intersección de las particiones). Otra investigación análoga (R 73), pero realizada con tenedores pinchados en un corcho a distintas alturas y con diferentes inclinaciones, reveló el papel precoz de las simetrías a partir del estadio I, pero sin cuantificación. El peso de los tenedores se sitúa en su extremo libre y la caída es prevista en la prolongación de su incli-

nación. En el nivel II A dicha previsión subsiste, pero el peso del objeto se sitúa en su punto de inserción (en el lugar en que «tira») y hay una cuantificación detallada. En el nivel II B se prevé que las caídas serán verticales y en el estadio III el sujeto encuentra compensaciones entre las posiciones y los pesos.

La R 48 estudia la composición de los pesos sobre un platillo ubicado en lo alto de una vara que se hunde más o menos en espuma de material sintético, según las cargas. En el nivel I A no hay relación entre los pesos y los hundimientos. En el nivel II B se encuentra la relación, pero ésta es ordinal y sin aditividad (dos o *n* plots no tienen el mismo peso según la manera como están ubicados). En el estadio II A notamos aditividad y conservación de un mismo peso independientemente de sus posiciones, mientras que en II B la acción del peso varía con su posición (pesos apilados o yuxtapuestos, etc.). En el estadio II, la aditividad aparece y está fundada en las igualdades de volúmenes.

La R 47, pesos suspendidos en direcciones opuestas, arroja resultados análogos con el mismo contraste entre los niveles II A y II B, pero la aditividad del estadio III se justifica por la igualdad de las fuerzas.

La R 20, que también ha sido citada, considera el equilibrio indiferente de dos pesos iguales suspendidos, a diferentes alturas, de un mismo hilo retenido por una polea. Al nivel I A, el peso no interviene o sigue siendo poco cuantificado. En I B, el peso elevado se considera más pesado y tenderá a bajar. En el nivel II A, los pesos se vuelven constantes, pero los plots tenderán a reunirse a la misma altura. En II B su acción varía con la altura y el más bajo descenderá aún más. En el estadio III la situación es comprendida. En la R 74 un gran plot puesto sobre una pendiente suave (en la parte ascendente) es tirado por un peso suspendido verticalmente en el extremo de la pista. En el estadio I no hay relaciones regulares entre los pesos ni de conservación (cf. la R 18 que presenta las suspensiones, demuestra que en el estadio I el valor del contrapeso no es aún considerado con tal que esté en situación de retener). Cuando el plot y el peso se comparan en suspensión vertical, el sujeto no estima contradictorio sostener que en ese caso el peso es más liviano que el plot, pero más pesado cuando lo tira en la situación inicial. En el estadio II el peso se conserva y si el plot, de primer intento considerado más liviano que el peso que tira de él, comprobándose luego que es más pesado

que éste, su movimiento es entonces atribuido a facilidades de deslizamiento, etc. En el estadio III la situación se comprende en función de la dirección de la fuerza. Señalemos una vez más que al observar el vagón puesto sobre un plano inclinado, en la R 19, se preguntó si se necesitaba más fuerza para tirar de él o empujarlo en un plano inclinado u horizontal y según las cargas estuvieran ubicadas delante, atrás o en medio del vagón: en el estadio III hubo equivalencia y únicamente en posición horizontal.

La R 75 confirmó y analizó el hecho de que un guijarro sumergido en el agua la hace subir a causa de su peso y no de su volumen, éste último pasó a ser decisivo sólo en el estadio III. En el nivel I A el nivel del agua no cambiará. En I B, bajará o subirá, pero bajo el efecto del movimiento del guijarro, porque, si éste fuera ubicado de antemano en el vaso, el agua tendría el mismo nivel que sin su presencia. En el nivel II A el peso hace subir al agua, aun cuando el cuerpo sólido haya sido puesto de antemano, y tanto más cuanto sea éste más bajo; una pelota agujereada también hace subir el agua porque al llenarse se vuelve pesada y actúa sobre el resto del agua. En el nivel II B las reacciones son intermediarias porque reúnen el peso y el «grosor», pero la cuestión de la pelota agujereada sigue sin ser resuelta, lo que se logra en cambio en el estadio III en el cual el papel del volumen ya es comprendido. Recordemos que en la R 39 la horizontabilidad del agua no es aún explicada por su peso y por su papel en la tendencia del agua a bajar, antes del nivel II B (9,6 a 11 años); hasta entonces el agua había sido considerada liviana.

La flotación de los sólidos había sido estudiada anteriormente por B. Inhelder[1]. Se la volvió a considerar en la R 21, utilizando líquidos de densidades diferentes: tres vasos que contienen agua y alcohol mezclados según las densidades $d_1 > D$, $d_2 = D$ y $d_3 < D$ con respecto a la densidad D de un aceite que el niño vierte con el mismo cuentagotas. Hasta el nivel II A incluido, mientras que el agua sigue siendo la misma en los tres vasos, mientras que el aceite vertido se considera aún proveniente del mismo recipiente, que cambia de un vaso a otro. En el nivel II B ocurre lo contrario pero sin alusiones espontáneas al peso relativo. Este último sólo

1. Ver Inhelder y Piaget, *De la lógica del niño a la lógica del adolescente* (P.U.F.).

interviene en el estadio III, cuando se considera el volumen (más o menos pesado a igual volumen).

La R 76 considera la flotación de placas de *sagex* de tamaños variables sobre las que se fijan pesos igualmente variables. En el nivel I A el peso sólo se invoca en oposición a los tamaños, pero, con la polivalencia habitual a ese nivel, tanto puede hacer flotar como hundir. En el nivel I B el tamaño de las placas interviene, pero es finalmente asimilado al peso. En el nivel II A el peso tiende a hundir y el *sagex* a retener en función de su tamaño, pero como éste comporta un mayor peso, el sujeto siente una contradicción que no logra resolver. En el nivel II B se agrega también la resistencia del agua (en el sub-estadio en que pasa a ser pesada, como se ha visto en la R 72). En el estadio III la explicación se encuentra relacionando las superficies (III A), luego los volúmenes de *sagex* y del peso reunidos comparados al mismo volumen de agua (III B).

La R 77 consideraba los pesos de los objetos según sus posiciones (vertical u horizontal, etc.), su localización en el objeto y la transmisión de su acción cuando éstos están apilados. En el estadio I las múltiples formas del peso (tirar, soportar, pesar sobre, etc) no están coordinadas y ni siquiera caracterizadas de una manera regular. En el nivel II A se asiste a una diferenciación entre el peso cantidad y los pesos-acciones pero sin coordinaciones: en las cuestiones de transitividad el objeto superior no pesa sobre la mesa a través de los otros sino que cada uno soporta un peso mayor que el anterior. En el nivel II B comienzan las coordinaciones y la transitividad o transmisión ya no es un problema. En el estadio III se agrega la solidaridad de las partes del objeto (modelos corpusculares).

La R 78 consideró la presión por hundimiento de plots según sus superficies y su peso, y la transmisión de compresiones cuando un plot se pone sobre cubos de plástico vacíos de peso muy escaso. En el nivel I A se niega esa transmisión, en el nivel I B hay oscilaciones, pero en II A se la acepta sin vacilar y con efectos acumulativos. En el nivel II B los cubos no transmiten sino más o menos porque retienen la acción (transmisión×resistencia) y en el estadio III hay transmisión con conservación del efecto. En cuanto a la presión como tal, en el estadio I el peso interviene solo, en II A se agregan resistencias pero sin alusión a las superficies. El papel de éstas se reconoce después de efectuar verifica-

ciones en el nivel II B y se prevé correctamente a partir del estadio III.

En lo que se refiere a la presión, el papel de ésta ha sido analizado en la R 79 a propósito de un tubo cilíndrico provisto de tres orificios a alturas diferentes, de los cuales parten chorros cuya longitud está en función de la presión del líquido. En el estadio I dicha longitud se prevé en función de la altura a la que están ubicados los agujeros y en el nivel II A todavía se considera que el agua tanto sube como baja para llegar al orificio por el que sale en forma de chorro; después de verificar la longitud de los chorros, el agua se limita a bajar. Desde los 9-10 años (II B), y especialmente en el estadio III, la previsión es válida, pero la presión se estima en función del volumen y no de la superficie. En lo que se refiere al aire, donde la relación inversa con el volumen es correcta, se verá que la presión en función de la disminución de volumen es comprendida en el estadio III (R 94, etc., ver más adelante en el § 20). Por el contrario, en el caso de vasos comunicantes de diámetros desiguales, la noción de presión atmosférica no es comprendida, pero, aunque acercándose a la idea de un peso relativo en la superficie, los sujetos del estadio III invocan un equilibrio de «potencias», es decir en un sentido de presiones o de pesos distintos de los que se miden en la balanza (R 80).

Finalmente, la R 81 ha utilizado una carretilla de brazos largos asidos a diferentes distancias del peso, que se debe levantar. En el estadio I la longitud de los brazos facilita la acción falta de transmisión de los efectos del peso: como éste está situado en el otro extremo no ejerce su acción a lo largo de los brazos. En el estadio II el peso obra menos o es «menos sentido», mientras que en el estadio III la composición del peso con la longitud da lugar a intuiciones del momento y sobre todo del trabajo, como se verá en § 15.

De esos múltiples hechos, se puede llegar a la conclusión de que existen cinco e incluso seis niveles, caracterizados, como ya se ha indicado, por un paso de la indiferenciación a la diferenciación entre el peso cantidad y el peso acción y a su coordinación final. El estadio I es el de la indiferenciación donde el peso (sin que esa palabra sea tan siquiera utilizada

todo el tiempo) es función del «grosor», pero considerado a la vez como cantidad de materia y como sede de diversos poderes. En el nivel I A no es aún cuantificado sino ordinalmente, de manera que el equilibrio en situaciones de balanza no es en general previsto, salvo en lo que se refiere a las simetrías precoces inspiradas por el caso del propio cuerpo y mencionadas en el § 6 (caso de la regla que sobrepasa el borde de la mesa, etc.). En el nivel I B ciertas compensaciones que aseguran el equilibrio son parcialmente comprendidas, pero sin conservación del peso según su posición (apiladas o yuxtapuestas, colgados de un hilo corto o largo, etc.) y por consiguiente sin aditividad posible. El estadio II es el de una diferenciación entre el peso-cantidad y el peso-acción cuyos progresos son respectivamente notables pero limitados por la falta de coordinación entre los mismos. En el nivel II A el peso-cantidad alcanza una primera variedad de conservación: la del peso del objeto que se cambia simplemente de posición (pero no es ése aún el caso cuando se modifica su forma): de donde se desprende una aditividad posible, representando esa conservación y esa aditividad incontestablemente un principio de composición operatoria en el sentido de § 6. Desde el punto de vista del peso-acción los progresos se verifican entonces en las situaciones de equilibrio, pero, en lo que se refiere a las direcciones seguidas por el peso como fuerza, se nota una laguna muy curiosa y bastante sistemática: el peso no desciende siempre verticalmente y, en algunos casos, ni siquiera tiende a descender. La R 73, por ejemplo, muestra que en ese subestadio una regla mantenida en posición inclinada desciende aún siguiendo su prolongación, si se la deja, y no verticalmente. Asimismo, las R 72 y 39 muestran que el descenso del agua no se atribuye a su peso, puesto que se la estima liviana: el papel de la pendiente abierta hacia abajo es aún el de un espacio libre (en oposición a los obstáculos exteriores que impiden la subida) y el nivel del agua no es reconocido como horizontal ni explicado por su peso. El vagón en el plano inclinado de la R 19 requiere más fuerza para ser mantenido en su lugar, porque tiene entonces tendencia a bajar,

que para hacerlo subir, porque en este último caso dicha tendencia desaparece.

En el sub-estadio II B, se observan por el contrario dos modificaciones notables en cuanto al peso-cantidad y al peso-acción. El primero se torna susceptible de ser conservado aún en lo que se refiere a los cambios de forma del objeto (albóndiga de arcilla transformada en salchicha o cortada en trozos). El segundo es desde ese momento considerado como orientado hacia abajo y verticalmente. Cada uno de estos dos progresos es importante, el primero al generalizar la relación del peso con la cantidad de materia y el segundo al procurar la conexión del peso-acción con los sistemas de coordenadas naturales (verticalidad de los descensos y horizontalidad del agua resultante de ésta). Ambos se constituyen en el mismo sub-estadio II B. Pero lo que aún falta es la composición de esas dos nociones del peso-cantidad y del peso-acción, de allí en adelante mejor diferenciadas en las dos direcciones de la masa y del dinamismo en general. Ese defecto de coordinación suficiente explica en particular el hecho de que la síntesis de la noción de fuerza no sea todavía posible a ese nivel, aunque la relación del peso con los sistemas geométricos de referencia marque una primera etapa en el sentido de su espacialización. En efecto, cuando los sujetos del nivel II B ven que el peso tiende a descender verticalmente, concluyen, por ejemplo, que actúa y «pesa» más hacia abajo que arriba o que está repartido de manera desigual en el objeto, etc., debiéndose en realidad esa regresión aparente a la no aditividad a los progresos del dinamismo, pero también a la falta de coordinación con el peso-cantidad.

Para que ésta pueda efectuarse, se precisa, en efecto, una condición más aparte de la simple determinación de las direcciones: es necesario relacionar el peso, en cuanto propiedad cuantificable de los objetos, a sus dimensiones espaciales en general. La principal de esas relaciones es la del peso y del volumen, que origina la constitución de la noción de densidad y la solución de los problemas de flotación. A propósito de estos últimos se pueden aún distinguir dos niveles, el III A,

en el que el peso es relativo a las superficies, el otro, (III B) en el que guarda relación con los volúmenes como tales. En este último caso se comprende bien la coordinación entre el peso-cantidad y el peso-acción puesto que, al comparar el peso de los cuerpos considerados en su volumen con el peso de los mismos volúmenes de agua, el sujeto apela simultáneamente a pesos-cantidades y a una interacción dependiente de éstos. En cuanto a la noción de densidad[1], que no puede construirse sino en el estadio III porque en el estadio I el peso se estima equivalente al volumen o «grosor» y en el nivel II A se le disocia de éste pero se le atribuye a la calidad de diversas substancias; en el nivel II B el sujeto se acerca a la idea de densidad con la hipótesis de algo que está más o menos «lleno» pero todavía de una manera semi-macrocósmica; finalmente la relación entre el peso y el volumen que se efectúa en el estadio III supone la noción de «prieto» pero a escala corpuscular. Ahora bien, ésta implica sin lugar a dudas, un punto de vista espacial, la noción de la continuidad interior a las superficies (estimadas hasta entonces principalmente por su perímetro) y sobre todo a los volúmenes, es decir la consideración del «conjunto de las partes» y no solamente de las particiones desunidas[2]. Recordemos además que para lograr pesos iguales con substancias de densidades diferentes (cera liviana y arcilla pesada o arena y mijo) los sujetos del estadio I construyen cantidades iguales e incluso mayores para las materias más pesadas, mientras que en el nivel II A el problema es resuelto. Por el contrario, cuando el niño ha llegado a construir por sí solo un trozo de arcilla del mismo peso que un corcho, sólo a los 9-10 años (nivel II B), deduce que para obtener el peso de la mitad del corcho basta con dividir en dos su albóndiga de arcilla. Se comprende en ese caso la dificultad de la distributividad (ver

1. Ver Piaget y Inhelder, *El desarrollo de las cantidades físicas en el niño,* tercera ed. aumentada, capítulos VIII y IX.

2. Intervienen también, sin lugar a dudas, una asociatividad y una conmutatividad, más difíciles de mantener a escala corpuscular que en plano macroscópico.

el § 12), la presente cuestión resulta por el contrario mucho más fácil.

La presión, por su parte, se comprende tan sólo en el estadio III, así como en las relaciones entre el peso y las longitudes, mediante previsiones acordes con la idea del momento, mientras que las explicaciones correspondientes no se encuentran aún, como se verá en el § 15, en la dirección del trabajo. Ahora bien, la presión depende naturalmente del peso-acción, pero en función de un peso-cantidad que se relaciona con la superficie. En cuanto a las intuiciones del momento, éstas confieren validez a la idea, hasta entonces sin fundamento, de que la acción del peso varía con su posición. En una palabra, cada una de estas maneras de relacionar el peso con una dimensión espacial equivale a la vez a tener en cuenta su cantidad y a precisar su acción difusa o concentrada o aún su punto y su extensión de aplicación, lo que implica en todos esos casos una coordinación entre el peso-cantidad y el peso-acción.

En cuanto a la estructura de esas puestas en relación, todas ellas equivalen (y es lo característico del estadio III) a construir relaciones de relaciones, es decir a atribuir a los objetos operaciones efectuadas sobre operaciones, ya que se trata, por un lado, del peso como operador o como fuente cuantificada de acción y, por otra parte, de la determinación de su zona momentánea de aplicación, estimados en términos de longitudes, superficies o volúmenes. Vemos aquí una estructuración causal comparable a las composiciones de vectores, con una pequeña diferencia, en el sentido de que ya no se trata de coordinar la intensidad de las fuerzas con sus múltiples direcciones posibles, sino con los sectores del espacio donde se localizan sus acciones, ya sea como punto de partida o como punto de llegada de las mismas. En la medida en que los cuerpos son concebidos en ese estadio III como formados por partículas, son éstas quienes determinan sus relaciones con el espacio, ya sea que se distribuyan bajo una forma más o menos prieta (densidad), o bien que aseguren la solidaridad entre las partes del objeto, de aquél que pesa (pre-

sión) o de aquél sobre el cual se ejerce el peso (momento). En estos casos intervienen por consiguiente dos clases de operaciones coordinadas entre sí aunque situadas a escalas diferentes.

§ 17 / LA NOCION DE TRABAJO

El trabajo, considerado como desplazamiento de una fuerza, se sitúa en el punto de articulación entre las composiciones vectoriales y las relaciones, que acabamos de considerar, del peso con las magnitudes espaciales. La diferencia consiste en que, en un trabajo, intervienen dos fuerzas: la que se desplaza (fuerza pasiva) y la que se utiliza para desplazarla (fuerza activa). Como éstas son equivalentes el físico puede medir el trabajo por medio de una de ellas (resultado obtenido) o bien por medio de la otra (desgaste necesario), pero psicológicamente la distinción se impone y es posible sostener que la noción de trabajo se construye tan sólo después de haber comprendido esa equivalencia. De una manera más precisa, el trabajo se efectúa por una transferencia o transformación de energía de una forma en otra, pero nos referiremos en el § 18 al examen de ese concepto.

La R 81, citada en el § 16, al considerar el «momento», nos proporciona un primer sondeo sobre el trabajo: dada una escalera de cuatro peldaños, ¿cuántos plots debe llevar una grúa sobre el primer peldaño para realizar un trabajo equivalente al transporte de uno solo sobre el cuarto? Los sujetos del nivel I estiman el trabajo realizado considerando únicamente la altura o bien alternativamente por la cantidad plots y la altura, pero sin efectuar la síntesis. En el estadio II se producen tentativas de compensación, pero sin lograrlo desde el punto de vista métrico y, por fin en el estadio III, se obtiene una solución numérica.

La R 42, ya citada en § 10, enfoca el problema precedente en forma horizontal (transporte de pesos por un camión), y en forma vertical (con una grúa), pero midiendo la fuerza activa por medio de la cantidad de bidones de gasolina utilizados por el ca-

mión o la grúa En el nivel II A los sujetos sólo toman en cuenta los pesos y no prestan atención a los trayectos o inversamente. En el nivel II B existen compensaciones cualitativas o aditivas (y las mismas en vertical y en horizontal): por ejemplo, si basta un bidón para desplazar un plot hasta el cuarto lugar (en horizontal), harán falta 1 y 1/2 para dos plots, o dos plots en el primer piso equivalen a uno en el tercero, etc. Una vez más, sólo en el estadio III intervienen las proporciones métricas. La reconsideración del problema de la escalera arrojó los mismos resultados que en la R 33.

La R 82 consideró la desmultiplicación en función de tres poleas de diferentes tamaños (A cinco veces mayor que B y ocho veces mayor que C, estando las tres fijadas sobre un mismo eje), mediante 2 preguntas principales: si se suspenden tres pesos iguales a la misma altura y por medio de tres hilos del mismo lado que las tres poleas y se hace girar el eje, ¿subirán todos juntos o uno de ellos llegará primero? Si dos pesos iguales son retenidos por el mismo hilo a las mismas alturas, a los lados opuestos de las dos poleas, ¿qué pasará si se deja girar el eje?, luego, después de verificar, ¿por qué desciende el peso de la rueda grande? ¿Y por qué el equilibrio no es alcanzado por un peso en A sino por cinco en B y por ocho en C? En el estadio I no se logra la explicación. En el nivel II A la ascensión de los tres pesos se prevé aún mal pero es bien explicada relacionando el tamaño de las circunferencias y el largo de los hilos; por el contrario, el problema del equilibrio resulta absolutamente incomprendido, el sujeto se limita a considerar el poder de las ruedas, como si la rueda A hiciera bajar el peso que cuelga de ella y no que éste hiciera girar la rueda. En el nivel II B, la ascensión se prevé generalmente bien y siempre se explica correctamente, pero en el caso del equilibrio, el niño supone una acción conjugada del peso suspendido con el de la rueda (debiéndose el descenso en A a ambos reunidos). En el estadio III, finalmente, los movimientos de los pesos, cuando se consideran las cuestiones de equilibrio, son relacionados con el tamaño de las circunferencias, lo que implica una relación de la familia del trabajo como desplazamiento de un peso: para estimar la cantidad de pesos en C que equilibran un solo peso en A, basta por ejemplo «observar cuántas veces entra el perímetro de C en el de A».

La R 83 considera, por su parte, la desmultiplicación en fun-

ción de la cantidad de poleas o de hilos. Se presenta a los sujetos un hilo en forma de ^ luego de N (con bases móviles), luego un doble hilo vertical y finalmente un cuádruple hilo vertical tirado por un hilo oblicuo. Se trata de prever los desplazamientos y las velocidades, luego las relaciones entre pesos, inmediatamente colgados en las bases. En el estadio I no se resuelve ninguna cuestión de manera correcta. En el nivel II A, la tracción sobre el hilo izquierdo de ^ da una previsión exacta de los desplazamientos a la derecha, pero no ocurre lo mismo con N y después de efectuar las verificaciones, las explicaciones sólo invocan la longitud de los hilos. Nada se logra en cuanto a los pesos. En el nivel II B, por el contrario, intervienen las duplicaciones de los hilos, de ahí que haya un peso superior sobre el hilo simple (a la izquierda) para equilibrar el de la derecha. Finalmente, en el estadio III, se logra la proporcionalidad y la desmultiplicación se explica por la igualdad de trabajos efectuados en función de la cantidad de hilos.

La R 84, finalmente, considera entre otras cosas un disco en rotación sobre el que se encuentra el niño de pie y cuya velocidad aumenta o disminuye, según el sujeto cierre o abra los brazos. Mientras que en el estadio I las reacciones no son ni regulares ni exentas de contradicción, y en el estadio II la explicación se funda en el peso que se estima varía con las posiciones, el estadio III se caracteriza por una puesta en relación del peso invariable con «una vuelta mayor» o «un recorrido más largo», es decir apelando a una noción de la familia del trabajo.

Los problemas que plantea la noción de trabajo son los de comprender el por qué de su valor explicativo y la naturaleza de su composición operatoria. En lo que se refiere al primer punto se comprueba, comparando el trabajo y el momento, que pueden responder a la misma formulación: df (medido por ejemplo en metros-kilogramos) para el momento y fd (medido en kilogramos-metros) para el trabajo, pero con una diferencia esencial: en df, el término d es una longitud estática y en fd es un trayecto [1]. Ahora bien si se ubican

1. Sin hablar de los casos en que el coseno es diferente a 1, abarcando en las nociones de «familia de trabajo» el desplazamiento horizontal de un peso.

sobre una báscula un kg a 30 cm, y 3 kg a 10 cm del centro, los sujetos del nivel III B llegarán a descubrir que esas relaciones de pesos×longitudes proporcionan una condición de equilibrio y lograrán así establecer la ley de los momentos, pero sin comprender la razón. Por el contrario, si se desplazan los brazos de la balanza, los sujetos del estadio III encontrarán una explicación de esta ley al comprobar que en ese caso el peso de 3 kg no se levanta sino a pequeña altura, mientras que el de 1 kg se eleva tres veces más: siendo entonces el «trabajo» el mismo: $3 \times 1 = 1 \times 3$, se tiene la impresión de comprender mejor desde el momento que se trata de dos acciones y no simplemente de relaciones estáticas de peso×longitud, es decir que los objetos, al desplazarse, «hacen» algo (lo que en ese estadio continúan por otra parte «haciendo» en estado inmóvil, pero bajo la forma de «trabajos virtuales»). No se trata únicamente de antropomorfismo, ya que es la sustitución de operaciones por simples relaciones lo que, de una manera general, permite completar la ley por medio de una explicación causal, aclarando las transformaciones en sí mismas.

La estructura de la noción de trabajo se desprende de lo que acabamos de ver, pero a condición de recordar que el desplazamiento de una fuerza supone otra que actúa como motor. Es por eso que no se puede hablar aún de trabajo cuando los sujetos del estadio II de la R 82 comprenden que una rueda grande hace subir más rápidamente el peso suspendido de un hilo que una rueda pequeña, porque ese hilo se arrolla alrededor de una circunferencia mayor. Se puede admitir, por el contrario, que poseen dicha noción cuando prevén que poniendo un peso sobre la rueda grande se podrán equilibrar varios pesos sobre las ruedas pequeñas, o que éste los hará subir si permanecen debajo de cierto nivel, porque en esos casos una fuerza desplaza a otra según trayectos diferentes. Lo mismo en la R 42, la relación entre los bidones de gasolina y los pesos desplazados a diversas distancias es lo que constituye el índice de la comprensión del trabajo.

En una palabra, si las composiciones estudiadas entre el

peso y las magnitudes espaciales comportan ya relaciones de relaciones y por consiguiente, pero haciendo intervenir la escala corpuscular, operaciones sobre operaciones, hay aún más en las utilizaciones del concepto de trabajo. En primer lugar, la composición de una fuerza y de un desplazamiento (considerado en su longitud y a menudo en su dirección, por consiguiente en equivalencia de complejidad psicológica con los vectores). Pero existe, además, la composición entre esa relación, que ya es de segunda potencia, y la fuerza activa que permite el desplazamiento de la pasiva: de esto resulta una relación a la tercera potencia, lo que explica su carácter tardío.

Pero eso no es todo, y, teniendo en cuenta que los tres términos de la composición (las fuerzas activa y pasiva y el desplazamiento producido por la primera fuerza) son de naturaleza dinámica, nos acercamos a un concepto de carácter superior. Físicamente, un trabajo resulta de un cambio de forma de una energía (y cuando se trata de bidones de gasolina como en la R 42 no es preciso aclarar que se trata de energía). Psicológicamente, es difícil encontrar un criterio para la aparición de esta noción de energía y resulta claro que, en la transmisión de un impulso (§ 4), el niño, lo mismo que los cartesianos, no alcanzará la relación $1/2\ mv^2$. Por el contrario, vamos a ver en § 18 el ejemplo de una transmisión de poderes diferente de la de los movimientos y que nos aproximará a la idea de energía. Ahora bien, la noción de trabajo comprendida de la manera que acabamos de proponer, es decir como la acción, en sucesión espacio-temporal, de una fuerza sobre otra, no está lejos de tal transmisión, al menos en las situaciones de desmultiplicación (R 82 y 83).

§ 18 / EL INTERCAMBIO DE PAPELES ACTIVO Y PASIVO EN LA NOCION DE ENERGIA

Considerando que el estadio III es aquél en el cual, de una manera general, el pensamiento alcanza a manejar hipóte-

sis en el terreno de sus operaciones, o de lo posible y de lo virtual en el campo físico, no es preciso aclarar que los sujetos de ese nivel distinguirán rápiadmente «lo que se puede hacer» y «lo que se hace», como decía uno de ellos utilizando un lenguaje aristotélico. Pero esa distinción de la potencia y del acto está aún lejos de atestiguar la presencia de una noción de energía y no indica más que el reconocimiento del hecho de que una fuerza no existe únicamente en estado de movimiento sino que continúa actuando en reposo o virtualmente. Por el contrario, los datos siguientes plantean un nuevo problema:

La R 85 consideró un juego de dos péndulos constituidos por unas bolas A y B retenidas por hilos a y b, estando éstos unidos a la altura de sus 2/3 partes por un elástico horizontal. Se pregunta qué pasará si se aparta y se larga la bola A, luego se efectúa la demostración hasta el momento en que el movimiento de B aumenta y el de A disminuye, y se hace prever y explicar lo que ocurrirá a continuación. Viene luego una segunda comprobación, cuando vuelve a comenzar el movimiento de A y a hacerse más lento el de B, lo que se hace explicar con una nueva previsión de la continuación, etc. En el nivel I A el papel de los hilos sigue sin ser comprendido. En I B se lo reconoce después de la comprobación (por otra parte sin orden secuencial necesario de las acciones), pero la reactivación de A se explica por el hecho de que esa bola «vuelve a tomar impulso» como si cada una pudiera volver a entrar en actividad independientemente de la otra. En el nivel II A hay previsión y explicación de la transmisión de A a B pero no se prevé la inversa; una vez comprobada se la explica como una transmisión recíproca. En el nivel II B ésta es anticipada pero sin continuaciones del proceso. En el nivel III A la previsión mejora y en III B (algunos sujetos de 12,8 a 15 años) el conjunto es previsto y explicado antes de cualquier comprobación.

La dificultad del problema reside seguramente en la presencia de tres reversibilidades, la tercera de las cuales es particularmente compleja: la de las oscilaciones de un solo movimiento pendular (A o B), la de las oscilaciones de dos mo-

vimientos de sentidos contrarios (A y B se cruzan cuando están a igual velocidad) y la del cambio de los papeles en la transmisión, puesto que A arrastra en primer lugar a B debilitando su propio movimiento, y B arrastra a su vez a A, etc. Al respecto es sorprendente ver que sujetos de 12-15 años preven esa alternativa de los roles activo y pasivo de cada bola, mientras que la mayor parte de los adultos que no son físicos no piensan en ese detalle.

Es entonces la alternativa de los roles activo y pasivo de cada una de las dos bolas lo que nos autoriza, cuando es prevista y comprendida antes de cualquier ensayo, a hablar de un nuevo modo de transmisión, distinto al del movimiento o al del impulso (§ 4). Es verdad que, para la física, la explicación puede ser proporcionada estrictamente en los términos de «tirar» y de «empujar» y que, si bien es más simple darla en el lenguaje de los intercambios de energía, ésta interviene también en los hechos del § 4. Pero, desde el punto de vista de las operaciones del sujeto que no es un físico, dichos fenómenos son menos fáciles de asimilar que las transmisiones de ese § 4. En efecto, lo que aquí se transmite ya no es un simple empuje, puesto que es cuando una de las bolas disminuye la velocidad de sus oscilaciones que la otra aumenta la de las suyas, y no una vez sino por reciprocidades alternas. Lo que adquiere, cuando llega su turno, la bola que pasa a ser pasiva es por lo tanto un poder y no únicamente un movimiento: es el poder de tornarse a su vez activa. Se puede entonces ver la aparición de una nueva noción y, aunque el sujeto no emplee el vocablo «energía», bautizarla de esa manera ya que se trata de un operador de nivel superior y especial del subestadio III B.

Esto no significa, naturalmente, que los sujetos de ese subestadio van a generalizar la noción y a ver, de allí en adelante, en la transmisión del movimiento una composición $1/2\ mv^2$ que se agrega a mv. Pero eso significa que en ciertas situaciones el sujeto llega a composiciones complejas y hemos visto que, a propósito del trabajo en la desmultiplicación, no está lejos de lograrlo. Más aún, se sabe que la energía cinética

$1/2\ mv^2$ equivale al trabajo fd efectuado mediante la aceleración de la masa m a partir del reposo y es pues notable, desde el punto de vista genético, ver esas dos nociones de trabajo y de energía constituirse al mismo nivel en situaciones experimentales distintas. Unicamente, en el caso actual, en el cual no interviene aún ninguna cuantificación (contrariamente al de la desmultiplicación) no se tiene la impresión de un esquema operatorio previamente construido en el terreno lógico-matemático y luego atribuido a las relaciones entre objetos físicos, sino en lo que se refiere a la reciprocidad general, pero alterna, que se presta a las bolas: parece por el contrario que se está en presencia de una de esas situaciones en las que el problema físico comporta relaciones imprevistas que es preciso estructurar en el momento de su descubrimiento.

§ 19 / EL CALOR Y LA LUZ

De los §§ 4 a 18 no hemos considerado más que situaciones de causalidad mecánica: éstas son, en efecto, particularmente accesibles al niño, que efectúa progresos continuos desde los niveles I A a III B, y aún, en algunos casos, logra algunos éxitos precoces. Esto se debe al hecho de que dichas situaciones corresponden a las acciones causales por manipulaciones propiamente dichas: la colaboración de los poderes motores de la mano y del control visual explica, sin duda, el carácter privilegiado del mecanismo por esas relaciones directas con la acción misma. Pero las actividades materiales del sujeto comportan muchas otras dimensiones: la visión puede funcionar por sí misma independientemente de las acciones manuales, el sonido desempeña un papel continuo en los intercambios sociales y físicos, el sujeto puede notar sus percepciones térmicas no bien tiene frío o demasiado calor, sin hablar de los contactos con los cuerpos calientes o helados, las quemaduras, etc. Pero, aparte de la dirección de la mirada, las acciones relativas a la temperatura y la regulación de la voz (o de la atención cuando se trata de escuchar mejor o de

no hacerlo), esas diversas conductas no dan ocasión de manifestarse sino a las regulaciones mucho menos activas y amplias que las actividades manuales o sensorio-motrices en general y sobre todo no conducentes a la toma de conciencia de los mecanismos de la retina, del equilibrio térmico o de las cuerdas vocales de la misma manera que, en la acción muscular de los miembros, se puede distinguir en caso de necesidad cada movimiento diferente de los brazos, de la mano o de los dedos. Es, pues, importante examinar lo que dan, desde el punto de vista da la causalidad, las experiencias elementales en esos campos.

La R 86 ha proporcionado las primeras indicaciones sobre los conceptos de la transmisión del calor por medio de una bolita de acero calentada en presencia del sujeto y luego sumergida en agua fría, o de una bola fría en agua caliente (con control sobre un cubito de hielo). Aun en esas situaciones de transmisión, sin embargo inmediata, los sujetos del estadio I rehusan admitir que el calor «pasa» de la bola al agua o inversamente, aunque prevén calentamientos o enfriamientos, pero tanto aquéllos como éstos se deben a una especie de acción por contagio que no es una transmisión en el sentido de un desplazamiento en el espacio. La tercera parte de los sujetos de seis años admiten así que la bola caliente calentará el agua, pero sin enfriarse, y se encuentran aún tales afirmaciones en dos sujetos sobre diez a los 7-8 años y en uno sobre diez a los 11-12 años. Para otros (más de la mitad hasta alrededor de los 11 años) habrá un intercambio completo (a menudo con alternativas repetidas) sin igualación.

En cuanto a esta última no es admitida sino en el estadio II por un cuarto (7-8 años) y un tercio (9-10 años). Por otra parte, ya en el estadio III, los efectos son simultáneos y continuos.

La R 87 trató sobre la conductibilidad con el objeto de precisar las ideas sobre la transmisión: se calienta con una candela la extremidad de un tubo de vidrio o de una banda de aluminio y en el otro extremo se derriten trozos de cera. En el estadio I se considera que la llama pasa por el agujero del tubo o a lo largo del metal para llegar a la cera. En el estadio II el calor se diferencia progresivamente del fuego, pero con indiferenciación entre la irradiación y la conducción. Sólo en el estadio III se comprende esta última.

La R 88 vuelve a considerar los problemas del agua pero utilizando un recipiente con dos compartimentos separados por una pared amovible de vidrio, y poniendo en ellos respectivamente dos cantidades iguales o desiguales (doble) de agua caliente y fría, o de agua caliente y «muy caliente». En el estadio I no hay pasajes ni cuantificaciones. En el estadio II tampoco hay transmisión franca a través del tabique de vidrio: seis sujetos sobre veintinueve admiten un semi-pasaje bajo la forma de influencias (irradiación). Cuando se pone en los compartimentos cantidades iguales y *a fortiori* desiguales de agua caliente a la misma temperatura (se la saca del mismo termo en presencia del niño), las tres cuartas partes de los sujetos admiten aún que la resultante será más caliente, como si el aumento de las cantidades de líquido provocara el de los calores. Sólo en el estadio III se produce una transmisión propiamente dicha y cuantificaciones válidas.

Se ve así la diferencia considerable que hay entre esas reacciones y las que se refieren a la transmisión del movimiento: en el estadio I ni siquiera hay transmisión inmediata, como si el paso del calor equivaliera a una acción unilateral sin que haya pérdida, a la manera de las influencias que un ser vivo puede ejercer sobre otro sin por eso perder sus poderes. Después de un estadio intermediario II, ya en el estadio III, se comprende la transmisión mediata, a la edad de las transmisiones meramente internas en lo que se refiere al movimiento. Existe pues una separación de un estadio completo entre las dos especies de nociones. La razón podría ser que el modelo causal del que dependen las cuestiones de calor es el de la mezcla probabilista irreversible y no ya un modelo reversible, pero sabemos que bajo sus formas simples no combinatorias (mezclas de perlas a partir de colecciones separadas, etc.) ese modelo probabilista es accesible desde el estadio II. La diferencia subsiste sin embargo y, para estimar su naturaleza, conviene ahora examinar las cuestiones de la luz.

La R 89 consideró entre otras cosas la visión y la naturaleza de la imagen en un espejo o de la luz proyectada por una lámpara. De una manera casi unánime los sujetos estimaron que la

visión comporta un pasaje dirigido del ojo hacia el objeto y no inversamente (excepto en el caso de los pequeños, donde nada pasa). En el caso de una linterna de bolsillo encendida, la mayor parte de los mayores admite una acción de la lámpara sobre el ojo, pero volveremos a encontrar el problema en la R 91 y muchos sujetos seguirán creyendo en un paso del ojo a la lámpara. En lo que se refiere al espejo, no hay reflexión en el estadio I, mientras que desde los 7-8 años el espejo devuelve la imagen o la luz bajo la forma de «reflejos». Pero cuando se ubica detrás del niño un objeto que él ve en el espejo, la solución más frecuente es la de un pasaje del ojo al espejo y de allí al objeto, pero en algunos casos hay un encuentro en el espejo de lo que parte del ojo y del objeto.

La R 90 utilizó una caja con vidrios de polaroid susceptibles de multiplicar los colores. En el estadio I, éstos son caracterizados como emanaciones materiales de los objetos (como las sombras al mismo nivel), y susceptibles de esconderse, de reaparecer y de «desteñir», pero sin grandes trayectos posibles. En el estadio II constituyen «reflejos» susceptibles de producirse en cualquier parte pero sin precisiones sobre la modalidad de paso. En el estadio III, por el contrario, se añaden los reflejos de la luz del día y una búsqueda de composiciones.

La R 91 consideró finalmente la transmisión de la luz y del calor a propósito de una lámpara que proyecta un círculo luminoso sobre una pantalla próxima o alejada. Hasta el nivel II B no hay ninguna transmisión pero hay una especie de acción a distancia. En el estadio I, la cantidad de luz está en función del tamaño del círculo, que se prevé decreciente con la distancia; cuando los hechos demuestran que el círculo mayor es el más alejado los sujetos del nivel I B vacilan aún en atribuirle más luz, pero sin transmisión en el sentido de un desplazamiento en el espacio, y precisando que no hay «nada» entre la lámpara y la pantalla. En el nivel intermedio II A ocurre lo mismo en lo que se refiere a este último punto, pero la contradicción se siente aunque no se exprese, mientras que en II B la relación inversa entre la cantidad de luz y la distancia prevalece finalmente de una manera decisiva y el sujeto comienza a emplear expresiones cinemáticas tales como: al luz «sale», «viene derecha», etc. En el nivel III A la transmisión se torna explícita, pero el agrandamiento del círculo a distancia se explica aún mal. Finalmente, en el nivel III B, el

sujeto recurre a un cono de luz con ampliación de los rayos en función de la distancia, lo que explica la mayor superficie del círculo acorde con el debilitamiento de la cantidad de luz.

Se comprueba pues que, a pesar de la utilización cotidiana de las linternas y las nociones corrientes sobre los «rayos» del sol o de las fuentes de luz, la transmisión de la luz no es más precoz que la del calor: sólo en el estadio III el sujeto admite la existencia de una luz «entre la máquina (la lámpara de la R 91) y el redondel... no la veo pero sé que está allí». Ahora bien, en las transmisiones de movimiento «a través» de las bolas de la R 2 (ver el § 4) el sujeto tampoco ve pasar nada ni comprueba más que la resultante final: no deja, sin embargo, de deducir, a partir del nivel II A, la existencia necesaria de un pasaje semi-interno de dicho movimiento, mientras que, tanto para la luz como para el calor, es preciso alcanzar el nivel III de las transmisiones puramente internas para que haya un pasaje comprendido como desplazamiento en lugar de una especie de acción inmediata aunque ejercida a distancia. Se podría invocar los posibles efectos de las técnicas de iluminación o de calefacción: se gira un botón eléctrico y surge la luz, etc. Pero éstas deberían, por el contrario, conducir a la idea de transmisión mediata: se habla de «corriente», etc. Ahora bien, en el caso de la transmisión de los movimientos, los sujetos que quieren indicar un pasaje en el interior mismo de las bolas hablan a veces de «electricidad» para designar un flujo y como sinónimo de lo que otros llaman, precisamente, «corriente».

La hipótesis que parecía imponerse es que la atribución de las operaciones a los objetos, por consiguiente el éxito de las explicaciones causales (y especialmente en el campo de las transmisiones), está en función de las acciones causales del mismo sujeto y de la finura de las regulaciones activas o regulaciones materiales que aseguren sus aciertos. En ese caso, la atribución de la transitividad de las composiciones aditivas, de las composiciones de dirección reversible, etc., está facilitada en el campo mecánico por la riqueza de las conductas

manuales que se controlan visualmente, es decir de acciones que ya son causales pero que, por sus coordinaciones, desempeñan además un papel importante en la génesis de las operaciones. Por el contrario, no ocurre nada semejante con la luz ni con el calor y no es cuestión de aprender a utilizar los botones de los radiadores o de las lámparas eléctricas, lo que puede proporcionar algún elemento que ayude al conocimiento de las estructuras, y ni siquiera de las transmisiones relativas a esos sectores de la realidad física.

§ 20 / EL SONIDO Y EL AIRE

Si asociamos aquí los problemas del sonido y el aire no es simplemente porque, a partir del estadio II, el segundo desempeña un papel en la transmisión del primero; esto sería muy artificial. Es porque si, como acabamos de suponer, la atribución de las operaciones a los objetos depende de la riqueza y de la regulación de las acciones causales del sujeto, que constituyen la zona de interferencia entre sus ideas sobre las conexiones objetivas y sus propias operaciones, entonces el aire ocupa una posición intermedia especialmente interesante entre los sólidos y líquidos manipulables y las realidades tales como el calor, la luz y el sonido que no lo son a la escala de sus composiciones estructurales. Es por eso que un examen un poco sistemático de las naciones que se refieren al aire podrá proporcionarnos, a título de análisis final, un cuadro retrospectivo de las relaciones o de las ausencias de relación entre la causalidad mecánica y las otras formas de estructuración. Pero comencemos por el sonido:

La R 89, que trata en parte sobre la audición, muestra que en el nivel I A no pasa nada del objeto al oído: «el ruido (se golpea sobre la mesa) ¿parte hacia tu oído? — No. — ¿Efectúa un recorrido? — Permanece en su lugar. — ¿Hay gente que dice que viene hacia nuestro oído? — Es falso» (6,10). Desde el nivel I B el ruido pasa al oído pero en general vuelve luego a su punto de

origen, como emanación del objeto que regresa a éste. En el estadio II parten líneas rectas en todas las direcciones y, al acercarnos al estadio III, es un «golpeteo» que «resuena», etc., y que se expande por intermedio del aire cuando no está él mismo en el aire.

La R 92 vuelve a considerar el problema por medio de un sonido producido por una aguja suspendida cuando se la golpea con otra aguja. En el nivel I A el sonido permanece en la aguja aunque puede circular en su interior. En el nivel I B llega al oído pero en la mayor parte de los sujetos regresa en seguida a la aguja. En el estadio II se trata de un estremecimiento que se esparce por doquier merced al aire. En el estadio III se torna susceptible de vibrar por sí mismo y transmitir así el sonido.

La R 93 utilizó un dispositivo con dos cuerdas, una más tensa que la otra, en las cuales se podía hacer variar la longitud de los segmentos para producir sonidos de alturas diferentes. Esa relación del sonido con la longitud (ley de Pitágoras) es descubierta a través de las diversas preguntas planteadas, en el estadio II y sobre todo en el nivel II B, pero, salvo en el estadio III, en el que la longitud y la tensión se encuentran disociadas, las explicaciones formuladas no invocan sino ésta última, como factor de naturaleza mecánica más fácil de comprender (la longitud sólo tiene sentido en la hipótesis ondulatoria).

Se comprueba así que la transmisión del sonido plantea menos dificultades que las de la luz y el calor. Al respecto, conviene recordar que, para los sujetos del estadio I, se piensa con la voz. En ese caso, cuando se pide al niño que cierre la boca y diga si, a pesar de eso, puede pensar, se obtienen respuestas de este tipo: «Es mi boquita de atrás de la cabeza que habla a mi boca de adelante». Como por otra parte la boca sirve para soplar, se establece así, a partir de la acción, una estrecha conexión entre la palabra y el aire, e incluso entre el pensamiento y el soplo y es sabido hasta qué punto las expresiones de las lenguas antiguas designaban el alma refiriéndose a éste último. Ahora bien, teniendo en cuenta que la palabra constituye una conducta más intensa y precozmente socializada que la visión, etc., puesto que intercambiamos más sonidos que impresiones visuales o térmicas, ya no se trata

de un sujeto único centrado en su propia acción, sino de una comunicación continua entre las diferentes fuentes de sonido. Es difícil no ver una influencia psicomórfica de esta situación en las reacciones de los sujetos que piensan que los sonidos subsisten en los objetos aun cuando no se los oye, luego van únicamente al oído y a ninguna otra parte, para regresar inmediatamente a su punto de origen; y finalmente están precozmente relacionadas con el aire, pudiendo éste ser interior o exterior a los individuos que se encuentran en juego.

En lo que se refiere al aire, se trata, sin duda, de la noción más polivalente, desde el punto de vista causal, utilizada por los niños, y más aún que la del peso (incluso anteriormente a ésta):

A partir de los 2;11 una niñita observada cotidianamente atribuía las olas de un lago al viento y éste a los árboles. A los 4;6 le hace desempeñar el papel de desplazar la luna; luego remueve el aire con la mano en dirección opuesta y sopla dos veces: «Ahora está grande, es por el aire, ahora está inflada». Después de otros razonamientos de ese mismo tipo, a los 5;6 años hacen nacer a los bebés de una bola de aire que sale del vientre de la madre. A los 5;8 gira sobre sí misma hasta tener vértigo y piensa que todo lo que la rodea se pone en movimiento a causa del «amano», es decir del aire producido por los movimientos de la mano o de todo el cuerpo; luego distingue el «amano blanco» o transparente y el «amano azul» del cielo (que alcanza la estatura de su padre, lo que explica por qué nada parece moverse para él). En resumen, el aire sirve para explicar cualquier fenómeno cuya causa es oscura.

En la R 72 la ascensión del agua por capilaridad en un tubo estrecho se explica por el aire en algunos sujetos de 6 a 11 años. Consideremos, entre esas reacciones, la de un niño de 6;2: se puede decir que es como una paja (que sirve para aspirar un jarabe): «cuando se sopla sube». Y a los 9,6: el aire «aspira el agua. — ¿Cómo? — El aire está en todo el tubo: cuando se lo sube, el aire empuja el agua hacia arriba»; por el contrario, eso no funciona con el aceite porque «el aire no puede pasar debajo para levantarlo». En una palabra, para esos dos sujetos aspirar consiste en empujar por debajo.

La R 11, que ya hemos citado en § 4, ha demostrado que en el estadio I la fuerza de atracción del imán depende de una «cola» pero cuyos poderes llegan hasta «soplar» y «producir viento» en caso de repulsión. En el estadio II el aire ya no interviene sino ocasionalmente bajo la forma de un «aire del imán» que es su corriente o la fuerza que «atrae».

La R 94, por el contrario, no se refiere exclusivamente al aire, a propósito del mecanismo de una gran jeringa, y, como ocurre a menudo en los dispositivos donde el aire desempeña un papel causal efectivo, no se lo invoca sino tardíamente. En el estadio I no hay nada de aire en la jeringa porque hasta el estadio II el aire no existe en estado de inmovilidad: cuando se trata de hundir el pistón hasta el extremo, la jeringa está tapada; los sujetos del estadio I «sienten» bien la resistencia pero la atribuyen al hecho de que el vidrio se comprime (lo cual nada indica) y en particular si se tapa el orificio superior, mientras que abriéndolo el vidrio «se abre». En el nivel II A se menciona el aire después de efectuar las comprobaciones, pero dotado entonces de poderes contradictorios: o bien ayuda al pistón a bajar, o bien lo rechaza «peleándose» con él. En el nivel II B el aire es mencionado desde el principio y rechaza al pistón porque, siendo desplazado por éste a un lugar que no le conviene, «desea volver», etc.; en dicho estadio II (A y B) el aire existe ya en estado inmóvil, pero sólo actúa como movimiento sin ideas de presión; esta última, por el contrario, es comprendida en el estadio III: el aire comprimido rechaza al pistón y, si se tira de éste sin destapar la base de la jeringa, algunos sujetos comprenden el efecto de aspirador del vacío de aire y la necesidad, para una cantidad determinada de aire, de ocupar un volumen normal y constante.

La R 95 consideró una especie de manómetro de agua: se sopla en un tubo que atraviesa el frasco cuyo fondo está lleno de agua; ésta sube entonces por otro tubo y vuelve a bajar al faltar esa presión. En el estadio I el sujeto no prevé que el agua subirá bajo la influencia del aire; después de la comprobación el aire arrastra al agua atravesándola. En el estadio II el aire empuja el agua pero todavía la atraviesa un poco: cuando un papel apoyado sobre el segundo tubo es expulsado por el aire, el sujeto se sigue preguntando si éste es o no el que se ha insuflado en el primer tubo (lo que es admitido en el estadio I). En el estadio III el mecanismo es comprendido: el aire se amontona sobre el agua y su presión la desplaza.

La R 98 utilizó un cilindro de papel liviano cuya parte superior se enciende: el aire caliente que sube a medida que se produce la combustión es reemplazado por aire frío que desciende en el cilindro, el cual vuela casi quemado. En el estadio I ese vuelo se debe al papel que es «volante», al fuego, al viento, etc. En el estadio II el sujeto invoca la presencia de aire o de «valor» adentro o bajo el papel para explicar el vuelo; ese aire puede venir del exterior, del interior del papel o incluso ser producido por sus movimientos durante la combustión, pero la necesidad de la forma cilíndrica no se comprende aún, como en el estadio III, en el que el aire frío baja en el cilindro y reemplaza al aire caliente que sube.

La R 99 ha reemplazado al cilindro por una espiral de papel que se hace girar alrededor de una varita, arriba de una fuente de calor. En el estadio I, la candela o el eje (inmóvil) bastan para explicarlo todo. En el nivel II A interviene el aire, que puede hacer «dar vueltas» o «subir» (lo que viene a ser lo mismo, como en el tubo helicoidal citado en § 13), sin que él mismo siga una dirección determinada. En el nivel II B empuja la espiral creando una corriente que sigue su contorno. En el estadio III, finalmente, el papel de la pendiente y de la inclinación del papel es comprendido como una condición eficaz de empuje.

En la R 100 el aire caliente hace girar una hélice y el papel de la inclinación de las paletas ya se comprende desde el nivel II B, sin duda a causa del plano horizontal sobre el cual gira la hélice en oposición a la espiral precedente. En el nivel I A no hay un intermediario entre la candela y el movimiento de la hélice, en I B se invocan el calor y el humo. En el nivel II A interviene el aire, pero sin más precisiones, y en II B se afirma la necesidad de la forma curvada de las paletas.

La R 96 utiliza un «ludion», juguete formado por un tubo ubicado verticalmente en una botella llena de agua hasta las tres cuartas partes de su capacidad: si se tapa la botella la presión del aire hace entrar agua en un pequeño orificio situado en la parte inferior del tubo, que entonces baja, mientras que al destapar el frasco, el tubo vuelve a subir. En el estadio I el aire no desempeña ningún papel: el tapón o el agua tienen poderes suficientes para explicarlo todo. En el nivel II A, el aire desempeña un papel necesario pero de

efectos contradictorios como en la R 94: ayuda a bajar al tubo, luego lo hace subir, etc. En el nivel II B se limita a empujarlo hacia abajo, pero la presión (con disminución de volumen) sólo interviene en el nivel III A (los sujetos del nivel III B comprenden además que hace penetrar el agua por la parte inferior del tubo).

La R 97 ha ceñido las respuestas a la simple cuestión de saber por qué se necesitan dos agujeros para hacer fluir el líquido de una lata de conservas. En el estadio I basta con un solo agujero y el aire no desempeña ningún papel. En el nivel II A interviene, pero con la polivalencia habitual: sale del agua o viene de afuera, se va para que el agua tenga lugar para salir o se mezcla a ella para ayudarla, flota o la penetra, etc. En el nivel II B adquiere la función precisa de empujar el agua, pero bajo la forma de una corriente de direcciones variables con respecto al líquido y que lo hace salir con o después de él. En el estadio III, finalmente, el aire toma el lugar del líquido, que sale solo.

Recordemos que en la R 63 (balón a reacción: § 14) el aire que sale del balón por la parte de atrás puede, en el nivel I B, tomar cualquier dirección y dar la media vuelta para empujar al balón en el otro sentido. En el nivel II A todavía puede dividirse con una parte orientada en un sentido y la otra en el sentido opuesto. Tan sólo en el nivel II B la dirección se estabiliza, y el retroceso se debe a que rebota contra las paredes.

Si queremos descubrir evoluciones regulares en todos estos hechos tan heteróclitos podemos en primer lugar comprobar que en el estadio I el aire es mencionado continuamente en situaciones en las que nada tiene que ver, y en las que desempeña el rol de una especie de *deus ex machina* para explicar fenómenos por otra parte difíciles de comprender, mientras que a los ojos del sujeto no interviene en las circunstancias en las que, de hecho, ejerce una acción causal. La razón es que, en el estadio I, el aire no constituye aún una sustancia permanente que sigue existiendo en estado inmóvil (por el contrario, en la R 92, el sonido siempre subsiste en la aguja

aun cuando no se lo oye: sólo adquiere realidad en movimiento como por una serie de creaciones *ex nihilo,* a la manera de ese aire que la niñita de 5,8 citada anteriormente cree producir merced a los movimientos de la mano. Ciertamente, desde el estadio I, el aire tiene el poder de empujar, lo cual es objetivamente exacto, pero con una diferencia considerable: el aire que empuja un objeto ha sido a menudo producido por los movimientos espontáneos de dicho objeto, lo que es una forma primitiva de la l'ἀντιπερίστασις: tenemos un ejemplo en la R 98, cuando el papel encendido remonta el vuelo gracias al aire que él mismo produce por sus movimientos. Ya hemos citado numerosos ejemplos (árboles, olas, polvos, nubes, etc., que producen viento al desplazarse, siendo luego activados por su propio viento). Pero además de esos empujes, que son frecuentemente auto-impulsos, el aire sirve para cualquier cosa: arrastra, aspira (sobre ese punto ver las confusiones en la R 72 entre aspirar y empujar desde abajo, lo mismo que en el caso de la paja que sirve para beber el jarabe); atrae al ludion y también lo rechaza, puede resultar de la «cola» del imán cuando ésta «sopla» para producir un rechazo, vuelve sobre sus pasos para empujar el balón de la R 63, atraviesa el agua y la dirige hacia cualquier parte, hace crecer a la luna inflándola y, llegado el caso, hace nacer a los bebés, etc. Por el contrario, en los casos en los que efectivamente desempeña un papel, en estado inmóvil y aun a veces en movimiento, no es mencionado (R 94, en la que los sujetos del estadio I explican las resistencias que encuentra el pistón imaginando desplazamientos del vidrio, R 95, 96, 97, 99 y 100, en las que el aire permanece ausente en casos en que su acción es prácticamente evidente).

¿Cómo es posible, en esta situación en la que el aire no es más que una fuerza o un poder espontáneo y momentáneo, que el sujeto pase (en el estadio II) a la idea de una sustancia que continúa existiendo en estado inmóvil o que es puesta en movimiento por otros cuerpos (que no son ya la fuente sino tan sólo una causa de desplazamiento) y no actuando entonces sino por empujes o arrastramientos? Teniendo en cuen-

ta que el aire es invisible y que sus direcciones no son observables sino indirectamente por medio de los efectos obtenidos, este cambio de actitud resulta especialmente problemático dada la evolución extremadamente regular de los niveles II A a II B (R 94, 96, 97, 63, 99 y 100): en II A el aire empuja o arrastra, pero sus direcciones siguen siendo contradictorias y sus puntos de aplicación poco precisos, mientras que en II B las direcciones son generalmente correctas y la forma de los empujes es analizada cuando es necesario (rebote en la R 63, paletas de las hélices en la R 100). Por supuesto, sólo puede tratarse, en semejantes progresos de la comprensión, de la atribución de operaciones al objeto aire: conservación y transitividad motriz en el nivel II A y principio de una geometrización de las direcciones (sistemas de coordenadas) en el nivel II B. Finalmente, en el estadio III aparecen como de costumbre las nociones de presión y de volumen ocupado en relación con las operaciones que ya hemos visto. Pero ¿en qué índices o hechos experimentales pueden entonces fundarse tales atribuciones? En el caso de los sólidos y aun de los líquidos los progresos del mecanismo están ligados a toda clase de acciones causales eficaces al mismo tiempo que al desarrollo de las operaciones del sujeto. En el caso del aire, por el contrario, no se ve actuar más que a éstas, pero ¿tendrían acaso el poder de modificar de una manera tan profunda las interpretaciones físicas del aire sin un aporte experimental correlativo y solidario de esa estructuración? Dicho aporte parece existir, pero no se debe a una manipulación directa del mismo aire: parece evidente que es por una asimilación continua de ese caso singular al conjunto de las estructuras causales construidas en el campo de los sólidos y de los líquidos que las ideas sobre el aire se transforman. En otras palabras, es más bien la coherencia general del sistema de las nociones y operaciones físicas lo que aquí desempeña el papel decisivo, y no una elaboración local. Si nos atrevemos a arriesgar esta comparación podríamos ver en esto cierta analogía con la manera en que los físicos llegaron en el pasado a precisar en detalle las propiedades y las acciones del éter

en correspondencia con los hechos conocidos en otros casos, salvo por la diferencia de que el aire existe y sus efectos son perceptibles.

En resumen, a pesar de su carácter fuera de serie, el aire desempeña un papel apreciable en el desarrollo de la causalidad entendida como atribución de las operaciones a los objetos. Concebido en primer lugar como un poder casi mágico ligado a una sustancia que no existe sino por instantes, pero producida a la vez por las acciones del sujeto y la de los cuerpos en movimiento, el aire luego se mecaniza, con cierto retraso a causa de su origen poco claro, pero finalmente lo logra al ser implicado en el vasto proceso de estructuración operativa del que no podría escapar, no por cierto a causa de los descubrimientos particulares que hubiera provocado, sino en virtud de analogías o más bien de exigencias deductivas generales a las que le es imposible sustraerse.

CONCLUSIONES

Al finalizar esta introducción creemos haber alcanzado una parte del objetivo indicado: interpretar esa sorprendente combinación de producción y de conservación que comporta toda variedad de causalidad por los caracteres análogos que presentan las grandes formas de composición operatoria, considerando dichas estructuras como atribuidas y no simplemente aplicadas a los objetos, es decir como si éstos constituyeran una suerte de operaciones capaces de funcionar como los de nuestra razón, lo que permitiría que sus acciones fueran comprendidas.

No es preciso aclarar que esas analogías o aún isomorfismos (por ejemplo, los grupos) de caracteres generales no significan ni identidad, ni tan siquiera isomorfismo de detalle entre una relación causal particular y una operación dada: volveremos luego a considerar estas diferencias (VI). Pero lo que es notable es encontrar en las estructuras causales formas necesarias de composición operatoria, tales como la transitividad (ver el § 4), la reversibilidad o las simetrías (§ 6), la aditividad (§§ 7-8), la multiplicatividad con las proporciones y la distributividad (§§ 9-12), la composición de las inversio nes y reciprocidades (§ 14), la razón suficiente (§ 15)[1], las

1. A estas formas generales de organización operatoria atribuidas a los objetos se puede agregar la recurrencia. Esta está implícita y permanece sobre todo «aplicada» en el caso de las transmisiones en general y especialmente en el de los bloques de Vergnaud (R 13). Pero su papel es evidente en una nueva investigación que forma parte del grupo de los trabajos sobre la acción: disponer fichas de dominó ubi-

coordinaciones de acciones con las magnitudes espaciales (§§ 16-17), la alternativa de las funciones entre operadores (§ 18), y aun comprobar cómo las nociones deducidas de las acciones del sujeto sin regulación suficientemente activa para traducirse en relaciones mecánicas son finalmente integradas al conjunto del sistema (§§ 19-20).

Si la definición de la causalidad como atribución de las operaciones a los objetos permanece dentro de la tradición corriente del racionalismo, el interés de los paralelismos observados consiste en forzarnos a encontrar en el desarrollo mismo de esas explicaciones causales la unión necesaria de esas dos constituyentes de toda composición operatoria que son la producción y la conservación, mientras que una de las dos es en general sobre-estimada en detrimento de la otra. En otras palabras, no merece destacarse tanto la atribución de los géneros o de los aspectos operatorios particulares en los hechos que preceden, sino más bien la de las composiciones como tales en sus dos caracteres inseparables de transformación y de coherencia.

Pero si existe una naturaleza tan semejante entre la causalidad y las operaciones, lo que significaría que ambas dependen de las leyes de la realidad, es decir, de las raíces comunes del sujeto y de los objetos, ¿por qué tantos trabajos y dificultades hasta lograr su descubrimiento o toma de conciencia? ¿Por qué esa larga evolución cuyas etapas acabamos de trazar en la psicogénesis? ¿Por qué esas confusiones iniciales, fuentes de errores e ignorancias, entre el sujeto y los objetos, si al cabo de sus conflictos terminan por coordinar sus acciones y aun por descubrir que son profundamente con-

---

cadas verticalmente a escasa distancia las unas de las otras, de manera que la caída de la primera sobre la segunda provoque sucesivamente la caída de toda la serie. En ese caso, resulta claro que la relación causal entre n y n+1 se generaliza en todos a partir de 1 y 1+1, y permite tanto las reconstituciones retroactivas como las anticipaciones: la recurrencia es entonces atribuida a los objetos en sí mismos y no constituye únicamente una operación interior a los razonamientos del sujeto.

vergentes? Son las grandes líneas de esta dialéctica, hecha tan pronto de indiferenciaciones como de oposiciones y de deformaciones mutuas, y luego de diferenciaciones y de coordinaciones, lo que nos falta describir. Se las puede caracterizar someramente de la siguiente manera: orígenes comunes en la acción pero teniendo, desde el principio, una influencia predominante de las acciones particulares para la causalidad y coordinaciones generales para las relaciones lógicas entre esquemas, indiferenciación todavía muy tenaz en el estadio I, con solidaridades positivas pero también deformaciones mutuas entre los aspectos causales y preoperatorios del pensamiento; diferenciación parcial en el estadio II con coordinación únicamente en la medida en que existen diferenciaciones; diferenciación y coordinación en constante progreso en el estadio III.

I) En lo que se refiere a los orígenes comunes no se requieren largos comentarios. Toda acción sensorio-motriz es causal, en su mecanismo psico-fisiológico y en sus resultados sobre los objetos, puesto que equivale a utilizarlos materialmente, desplazándolos, uniéndolos, etc. Sin embargo, ninguna de esas acciones particulares sigue siendo exclusivamente causal ya que al repetirse, generalizarse, unirse a otras, etc., participa de la elaboración continua de un esquematismo dominado por las exigencias de una coordinación general; este último aspecto de las acciones se encuentra en el origen de las futuras operaciones de la inteligencia. Existe, pues, desde el principio, una estrecha conexión entre el aspecto causal de las acciones y el aspecto que podemos llamar lógico, pero también existe distinción, sin que la misma nos autorice a trazar una línea de demarcación nítida, puesto que cuanto más simple es la acción existen menos diferencias entre sus propiedades particulares —que dependen más o menos de la causalidad— y sus poderes de asimilación esquematizante, fuente de actividades lógicas o prelógicas del sujeto. Pero el interés de esta indisociación relativa inicial es que obedece más a una complementariedad en el funcionamiento que a confusiones en la toma de conciencia, ya que ésta última no se desarrolla

en un plano diferente al de la ejecución sino a partir de la conceptualización debida a la función semiótica, es decir en el estadio I de la inteligencia representativa.

II) Por el contrario, en lo que se refiere al estadio I del pensamiento representativo, las cuestiones de relaciones entre la causalidad y las estructuras preoperatorias se plantean en el plano de la conceptualización, es decir de las nociones causales o precausales, por un lado, y de la organización prelógica de los juicios o funciones, por el otro. Es pues en ese plano que puede ahora hablarse de indiferenciación relativa.

Ahora bien, esa indiferenciación es de tal importancia que, sin lugar a dudas, se la puede invocar para responder a las dos cuestiones fundamentales que plantean las reacciones propias a dicho estadio: ¿por qué los conceptos, inferencias, etc., de los sujetos de dos a seis años siguen siendo preoperatorios, si no es a causa de intrusiones ilegítimas de la causalidad, y en razón de una causalidad en sí misma insuficiente? ¿Y por que ésta última sigue siendo así y en cierto modo precausal, si no bajo la influencia de las estructuras de ese nivel, las que, a su vez, siguen siendo rudimentarias? En una palabra, la hipótesis sería que las estructuras causales y lógicas de dicho estadio I padecerían unas y otras de los efectos de retraso producidos por una indiferenciación relativa, mientras que una coordinación debida a una diferenciación suficiente podría serles provechosa.

Comenzando por los caracteres generales de reversibilidad y de conservación que faltan en las estructuras prelógicas de ese estadio, parecería difícil cuestionar el hecho de que esa laguna se deba a la primacía de la acción causal sobre la operación deductiva. Cuando el sujeto trasvasa un líquido, modifica la forma de un objeto o la disposición espacial de una colección, etc., esas acciones siguen estando tanto más alejadas del status de las operaciones reversibles cuanto parecen a los sujetos de naturaleza más causal, en tanto que la causalidad introduce nuevos efectos, no preformados y que modifican al objeto sin que se puedan fijar de antemano los límites

de esas transformaciones (lo que ocurrirá solamente en el caso de que esa causalidad se convierta en una atribución de operaciones). Dicho de otra manera, como la mayor parte de las acciones causales son irreversibles, para que una acción se interiorice en operación es necesario que sea suficientemente distinta de las acciones causales o del aspecto causal de las acciones en general, de lo contrario la indiferenciación constituirá un factor de atraso.

En lo que se refiere a la inclusión de la parte en el todo, se preguntó a un sujeto que no tenía nada de excepcional si, considerando veinte perlas de madera de las cuales unas 15 a 18 eran perlas oscuras, el collar que podría confeccionarse con las perlas de madera sería más o menos grande que el de perlas oscuras. La respuesta fue, substancialmente, que el collar de perlas oscuras sería más largo porque, una vez ensartadas éstas, ya no sería posible movilizarlas para ponerlas en el otro: respuesta irrefutable si se trata de acciones causales sincronizadas, pero reveladora del hecho de que a ese nivel el pensamiento procede aún como la acción material sin la movilidad necesaria para comparar un todo no disociado B con una parte disociada A, puesto que el acto material de retirar A no hace que esa parte sea comparable a su complementaria A′.

Del mismo modo, las dificultades de la seriación (que no proceden al principio sino por pares sucesivos sin mediaciones) o la incapacidad de estimar números o cantidades por correspondencias que no sean ópticas, es decir fundadas en la disposición espacial y la longitud de las filas, muestran también —seguramente— la subordinación en que permanece el razonamiento respecto de los encadenamientos materiales y causales[1]: decir que una hilera de 10 fichas contiene más que otra de diez pero un poco menos larga, equivale a fiarse a las mismas consideraciones de simetría o de asimetría que hacen que una regla apoyada perpendicularmente al borde de

1. Anteriormente hemos hablado a este respecto de subordinación figurativa del número al espacio, pero intervienen además consideraciones de tamaños, simetrías, etc., en un sentido igualmente causal.

una mesa caiga si la sobrepasa en más de la mitad (ver § 6); y el hecho de no seriar los objetos sino por pares resulta muy semejante a las transmisiones sin mediadores de los comienzos de la causalidad [1].

III) En una palabra, se puede legítimamente suponer que el carácter preoperatorio del pensamiento en el estadio I obedece a una falta de diferenciación suficiente con las relaciones causales. Pero la inversa es sin lugar a dudas real y el carácter precausal o de causalidad psicomórfica de las interpretaciones físicas propias a ese mismo estudio no podría explicarse sin una indiferenciación relativa respecto de las relaciones prelógicas.

Los dos caracteres más generales de éstas son, en efecto, las dificultades de regulación del «todos» o del «algunos» y la ausencia de reciprocidad de las relaciones. Sin lugar a dudas, si se sostiene que esos defectos de composición operatoria se deben a la indiferenciación de las relaciones lógicas y causales, es obvio que la insuficiencia de dichas estructuras prelógicas impedirá, recíprocamente, que la causalidad alcance un nivel racional. Pero queremos decir algo más, y mostrar que ciertas relaciones prelógicas se traducen directamente en formas precausales bastante específicas. Los inconvenientes en dominar las relaciones del «todos» y del «algunos» (dificultades de inclusión) comienzan, por ejemplo, en una situación en la cual el sujeto puede distinguir poco al andividuo de la colección: «la babosa» o «una luna» no significan, así, ni el mismo objeto individual, ni simplemente una misma especie, pero siguen siendo intermediarios entre lo singular y lo colectivo a la manera de una especie de individualización repre-

1. Recordemos aún que en las conferencias por medio de las cuales Bever y Mehler estimaron poder probar la existencia de una cuantificación precoz e incluso «innata» en los niños de 2-3 años (y que hemos repetido sin obtener los mismos resultados), es visible que toda acción que modifique al conjunto dado, parece ante el sujeto aumentar la cantidad de ese conjunto, como si una acción causal sólo pudiera enriquecer cuantitativamente a su objeto.

sentativa del todo, o de ejemplaridad. Ahora bien, cuando en el problema de la formación de las sombras, el niño diga que la sombra que una pantalla produce sobre la mesa «es la sombra de abajo de los árboles», etc., o cuando para explicar el movimiento de un objeto diga que «es el viento» que lo empuja, tampoco sabrá decidir entre las dos posibilidades «x=x'» en el sentido del mismo objeto individual y «x es análogo a x' en tanto pertenece a la misma clase X». Y en consecuencia admitirá entonces que la sombra de los árboles o el viento del exterior han pasado instantáneamente por la ventana para actuar sobre la mesa. Todos los razonamientos por «transducción» están basados en ese proceso analógico, y este último interviene frecuentemente en las acciones causales sin contacto espacial o inteligible tan frecuentes en el nivel IA.

En cuanto a la falta de reciprocidad de las relaciones podemos decir que desempeña un papel importante en la causalidad, especialmente en las dificultades de establecer las relaciones necesarias entre una relación y su proporción inversa: por ejemplo, si A se apoya sobre B que se apoya sobre C, el peso que «pesa» en el sentido ABC no es el mismo que el que «es soportado» en el sentido CBA. Todas las desigualdades entre los caminos recorridos por objetos tirados por un mismo hilo dependen de dificultades análogas de composición entre relaciones, etc.

De una manera general, las dificultades combinadas del ensamblamiento (todos o algunos) y de la composición lógica de las relaciones producen una ausencia de cuantificación y esa laguna constituye uno de los caracteres más constantes de la causalidad propia al estadio I.

En conclusión, la indiferenciación relativa entre las relaciones causales o precausales y lógicas o prelógicas provoca interacciones continuas en el seno de las cuales es posible discernir influencias en los dos sentidos del recorrido. Sería pues artificial pretender distinguir en detalle a ese nivel operaciones «aplicadas» o «atribuidas» al objeto: en primer lugar porque no existen aún formas operatorias distintas de las re-

laciones directas entre contenidos, y por consiguiente no hay operaciones; y luego porque las acciones del sujeto ejercidas sobre los objetos producen por indiferenciación una asimilación de las respuestas de éstos a las manipulaciones de aquél, de donde proviene el psicomorfismo. Ahora bien, si este último puede ser tachado de atribución completa de las acciones del sujeto al objeto, ésta sigue siendo de un tipo diferente al de las atribuciones distintas de la aplicación y que la formación de las operaciones permite, en el estadio II, después de una diferenciación suficiente de la forma operatoria y del contenido causal de las acciones.

IV) Es pues en el estadio II donde se efectúa esa diferenciación, pero ésta sigue siendo aún limitada, y la primera cuestión es comprender el por qué. En efecto, las operaciones llamadas «concretas» sólo son parcialmente disociadas de su contenido y consisten en estructuraciones sucesivas de contenidos diferentes, con separaciones horizontales sistemáticas: recordemos, por ejemplo, que las conservaciones (con los mismos tres argumentos generales de la identidad, de la reversibilidad y de las compensaciones), las seriaciones y las transitividades no se aplican al peso sino hacia los 9 años, mientras que, exactamente, las mismas formas operatorias son utilizadas desde los 7 años para las cantidades simples de materia. Ahora bien, la razón de esto es seguramente una continuación de influencias de la causalidad sobre la lógica, tan evidentes en el estadio I: es en función de sus propiedades dinámicas complejas (ver el § 16) que el peso no puede ser elaborado lógicamente sino más tarde, etc.

Recíprocamente, si la causalidad propia al estadio II no logra sobrepasar ciertos límites (transmisiones semi- y no completamente internas, dificultad de las composiciones vectoriales, etc.), la primera razón es, por supuesto, que las operaciones cuyos progresos se ven frenados por la insuficiencia de su diferenciación incipiente de la causalidad, no pueden promover a esta última más allá de ese nivel. Sin embargo, diferenciándose hasta un grado suficiente, esas operaciones comien-

zan a organizarse por sí mismas y los progresos de sus coordinaciones permiten, como se ha visto, no solamente múltiples «aplicaciones» (que además forman parte de la estructuración de los contenidos y, por consiguiente, de la propia organización de las operaciones concretas), sino también cierto número de «atribuciones» que explican los progresos de la causalidad en dicho estadio (transmisiones mediatas, etc.). Solamente, interviene una segunda razón que impone un límite a esos progresos: las primeras formas de organización de las operaciones siguen siendo bastante elementales y de primera potencia, en oposición a las operaciones sobre operaciones que caracterizarán al estadio III gracias al trabajo continuo de las abstracciones reflejas. En efecto, esas primeras estructuras operatorias no consisten aún sino en «agrupamientos», que son grupos incompletos y semi-redes e ignoran aún la combinatoria y los grupos INRC de dos reversibilidades. De esto resulta que, como el pensamiento operatorio no procede así sino por «contigüidades», es decir de uno en uno (a falta de combinatoria), la causalidad resultante de esas atribuciones sólo conocerá secuencias en cierto modo unilineales en el orden del tiempo (secuencias sucesivas sin interacciones múltiples y simultáneas) y del espacio (direcciones privilegiadas sin composiciones vectoriales entre direcciones de fuerzas desiguales), etc.

Es cierto que podría suponerse que las composiciones de uno en uno que limitan la movilidad de las estructuras operatorias de dicho estadio II se deben precisamente a las influencias de retraso (a falta de diferenciación y por lo tanto de coordinación suficientes) de la causalidad sobre las operaciones: en efecto, como las operaciones concretas que tratan directamente sobre los objetos y los caracteres de éstos dependen en gran parte de la causalidad, podrían, por eso mismo, no sólo retrasar las estructuraciones (acabamos de verlo en el caso del peso), sino también imponer a las operaciones sus modalidades unilineales de composición de uno en uno. Más aún, el paso de las operaciones sobre los objetos a las operaciones sobre operaciones que marcará el advenimiento del estadio III supone una construcción continua por abstracción

refleja que no depende únicamente de los objetos sobre los que actúa, sino que implica cierto trabajo del pensamiento que no puede ser acelerado a voluntad ni en función de las circunstancias exteriores únicamente, y es sin lugar a dudas de él que depende en gran parte la velocidad de las diferenciaciones entre la causalidad y las operaciones.

V) En el estadio III finalmente, la diferenciación de la causalidad y de las operaciones es suficiente como para permitir a la vez el libre proceso de éstas y atribuciones suficientemente ricas que aseguren el desarrollo igualmente notable de la causalidad en ese nivel. Hasta ese momento, la evolución de estas suertes de estructuras complementarias seguía siendo bastante paradójico. Por un lado, hemos comprobado constantemente (§ 4 a 18) el mutuo apoyo que se prestaban, ya que las operaciones proporcionaban por medio de atribuciones una forma deductible a la causalidad y la experiencia física necesaria a ésta activaba por otra parte el trabajo de construcción de las operaciones. Pero, por otra parte, acabamos de admitir (de II a IV) que la indiferenciación en un principio considerable (estadio I) y luego aún relativa (estadio II) de esas mismas estructuras constituía un obstáculo para su desarrollo. En realidad no hay nada contradictorio en esto, ya que sus servicios recíprocos son función de coordinaciones que suponen una diferenciación suficiente, mientras que la indiferenciación es fuente de confusión o de deformación.

El examen del estadio III parece confirmar la validez de esta interpretación, puesto que es aquél en el que las operaciones se disocian suficientemente de su contenido, de manera que pueden funcionar formalmente, y entonces las «atribuciones» a los objetos de las operaciones así depuradas hacen efectuar a la causalidad progresos decisivos en todos los campos estudiados. Es pues tan sólo en ese estadio que el pensamiento del sujeto comienza a parecerse funcionalmente al pensamiento científico cuyos dos caracteres más notables son sin lugar a dudas los siguientes: por un lado acuerdo permanente

entre los instrumentos deductivos y la experiencia, acuerdo cuya trivialidad resulta tanto menos evidente cuanto los primeros están mejor disociados y diferenciados de la segunda; por otro lado una serie ininterrumpida de servicios mutuos que se prestan estos dos tipos de procedimientos, las experiencias más finalmente aproximadas obligan a efectuar nuevas reconstrucciones formalizadas, y las teorías más abstractas conducen en la medida misma de sus distinciones formales más profundas a nuevas verificaciones cuyos resultados eran hasta entonces imprevisibles.

VI) Pero un enigma subsiste en la evolución que acabamos de observar. Si, por un lado, la causalidad y las operaciones tienen un origen común en las acciones del sujeto, con una pequeña diferencia, a saber, que la primera depende más de las acciones particulares y las segundas de sus coordinaciones, y si, por otra parte, esos dos tipos de estructuras se refuerzan al diferenciarse, pero se contrarían en parte en la medida en que permanecen indiferenciadas, ¿en qué consiste pues tal diferenciación y de qué manera procede?

Ese problema del paso entre estructuras cognoscitivas inicialmente indiferenciadas, y por eso mismo fuentes de oposiciones internas, a estructuras a la vez diferenciadas y coordenadas de manera coherente, domina en realidad todo el desarrollo mental en sus procesos fundamentales de equilibración progresiva, de desequilibrios periódicos y de reequilibraciones constantes. La cuestión de las relaciones entre las operaciones lógico-matemáticas y la causalidad no constituye así más que un caso singular, aunque especialmente importante en razón de la gran dicotomía que representa. Conviene entonces recordar la generalidad del problema antes de caracterizar los términos de esta diferenciación particular.

En todos los campos analizados hasta ahora, las nociones o estructuras indiferenciadas de partida comportan en diversos grados contradicciones implícitas y aun explícitas. Por ejemplo, la indiferenciación relativa del tiempo y de la velocidad puede conducir a juicios de este tipo «más rápido=más le-

jos=más tiempo», y también «se llega más rápido=menos tiempo». La indiferenciación de la fuerza y de los movimientos equivale a considerar el «impulso», ya como la fuente, ya como el resultado de éstos. El peso-acción-propiedad permite a los jóvenes sujetos afirmar simultáneamente que los barquitos flotan porque son livianos, y entonces el agua los sostiene, y los grandes porque son pesados y pueden sostenerse a sí mismos, etc.

Si dichas indiferenciaciones se explican por sí mismas en tanto se trata de conceptos extraídos o en parte dependientes de acciones propias mal analizadas desde el doble punto de visa operatorio y causal, el motor de las diferenciaciones y sobre todo la razón de su solidaridad con las coordinaciones deben entonces ser buscados en los procesos dialécticos que provocan las contradicciones. Cuando éstas son percibidas, y es inevitable que lo sean tarde o temprano, el sólo hecho de procurar y *a fortiori* conseguir suprimirlas conduce a la vez a efectuar distinciones, por consiguiente a una diferenciación de las nociones, y a un esfuerzo de coherencia; por lo tanto, a coordinaciones. Además, y esto es lo esencial, dichas distinciones y dicha coherencia no pueden ser obtenidas sino por una «superación» (*aufhebung* *), que consiste en una nueva fusión y, de hecho, en una relativización de las nociones. Por ejemplo, para los jóvenes sujetos un objeto no puede ser a la vez mayor que otro y más pequeño que un tercero, porque no podría ser a la vez «grande» y «pequeño»: en efecto, esos términos siguen siendo predicativos y absolutos (ulteriormente con la posibilidad de una tercera clase: la de los «medianos»), y un carácter a no puede entonces sino ser incompatible con no-a. A continuación, por el contrario, los atributos «grande» y «pequeño» pasan a ser relaciones y entonces $\pm$ a no sólo se torna compatible con $\mp$ no-a sino también equivalente.

Ahora bien, esa superación progresiva de las contradicciones, que constituye por consiguiente el proceso formador de

* En el original «dépassement» (*aufhebung*). Esta última palabra significa en alemán anulación recíproca. (N. del T.).

las diferenciaciones y de las coordinaciones, es fundamental en cuanto a las relaciones entre las operaciones y la causalidad. Suprimir contradicciones es, en efecto, construir una nueva estructura operatoria. Pero, por otra parte, cuando dichas contradicciones dependen de la interpretación de hechos mal comprobados o mal explicados, la coherencia obtenida concierne a operaciones aplicadas y luego atribuidas a los objetos, y se trata entonces de estructurar un contenido, y por lo tanto de alcanzar o de elaborar una nueva estructura causal.

En los §§ 4 a 20 del presente estudio hemos tratado de mostrar las aportaciones positivas de las operaciones a la causalidad, en su desarrollo, pero también los constantes servicios recíprocos que la segunda presta a las primeras. En los §§ II y III de esta Conclusión hemos, por el contrario, comprobado de qué manera se contrarían éstas en la medida en que siguen siendo relativamente indiferenciadas. Ahora bien, vemos ahora que esos conflictos latentes debidos a las indiferenciaciones son en sí mismos fuentes de progreso en la medida en que las contradicciones constituyen un motor de nuevas coordinaciones. En particular, todo el nivel II B nos permite aclarar este aspecto. Por un lado, en él terminan de formarse las operaciones «concretas», lo que permite en consecuencia una serie de aciertos en sus atribuciones a los objetivos, por consiguiente en la causalidad: por ejemplo, la construcción —hacia los 9 años— de los sistemas simples de coordenadas coincide con aciertos direccionales, y recíprocamente la diferenciación de la fuerza y del movimiento favorece la de los estiramientos y desplazamientos, es decir la conservación de las longitudes, etc. Pero, por otra parte, las limitaciones de las operaciones concretas provocan lagunas sistemáticas en la solución de los nuevos problemas dinámicos que se plantea el sujeto, y provocan aún contradicciones en la medida en que el sujeto no logra disociar por hipótesis los factores en juego y no procede sino por correspondencias seriales de naturaleza global: de ahí las exigencias de superación que conducirán a la construcción de las operaciones hipotético-deductivas o formales.

De una manera general, la historia de las relaciones entre las operaciones y las explicaciones causales está, pues, hecha de una serie de alternativas entre apoyos mutuos (§§ 4 a 20) y oposiciones fecundas, fuentes de las diferenciaciones y de las coordinaciones. El resultado final es entonces doble. Por otra parte, cada nuevo problema que surge, ya sea con ocasión de contradicciones internas, ya de contradicciones más extendidas entre las operaciones empleadas y la estructura de los objetos, conduce a la construcción de estructuras operatorias nuevas, como las del estadio III que sigue al nivel II B. Pero, por otra parte, y de una manera aún más amplia, esas diferenciaciones y esas coordinaciones, ya sean operatorias, ya causales, llegan a una disociación progresiva de los planos: el de lo real, es decir de los contenidos y de los objetos, y el de las formas operatorias del sujeto, construidas de tal manera que ya no pueden ser objeto de contradicción por parte de los hechos, lo que equivale en definitiva a situarlas en el nivel de las relaciones hipotético-deductivas, es decir de relaciones directas y extratemporales entre lo posible y lo necesario. Es lo que debemos examinar ahora.

El aspecto causal de la acción propia abarca sus dimensiones espacio-temporales, sus velocidades y su dinamismo, mientras que las relaciones lógico-matemáticas hacen abstracción de esas condiciones físicas para no retener más que la forma de las coordinaciones. En cuanto a éstas, y aún independientemente de la relación de las acciones con los objetos, comportan aún como tales, en tanto que procesos psicológicos, cierto aspecto dinámico, una velocidad, una duración, etc. Considerar únicamente su forma plantea igualmente un problema: ¿cómo disociarla de esos lazos con la causalidad general de la acción? Las conexiones lógico-matemáticas son esencialmente extratemporales y no relacionan sino elementos sustraidos a la sucesión y a la alteración, lo que las vuelve formales. La cuestión se reduce entonces a lo siguiente: ¿cuáles son las etapas del pensamiento del sujeto susceptibles de pasar de una situación en la que casi todo sigue siendo sucesivo y causal a una situación que permita descubrir las relaciones extra-

temporáneas entre formas estables o susceptibles de encontrarse nuevamente?

Dos procesos complementarios conducen a ese resultado y parecen pues responsables de esa diferenciación progresiva entre lo lógico-matemático y lo causal: el esfuerzo de la representación para constituir cuadros de conjunto simultáneos de acontecimientos pasados, presentes y futuros, que sigan siendo sucesivos al plan de comprobaciones perceptivas, y la intervención de autorregulaciones que introducen en esos sistemas un equilibrio móvil tal que las coordinaciones puedan ser efectuadas en ambos sentidos, directo e inverso (o recíproco) y transformarse así en operaciones reversibles [1].

Pero no todo está dicho, pues si bien el proceso de equilibración permite en el campo operatorio, no solamente relacionar los estados por medio de transformaciones reversibles, sino aún conferir a éstas una estabilidad móvil, esto no basta para sugerir la extratemporaneidad. En efecto, la explicación causal procede de una manera análoga al interpretar los estados de equilibrio por medio de transformaciones compensadas y las transformaciones no compensadas a partir de los estados de equilibrio. Sin lugar a dudas, esto procede de una atribución a los objetos del propio juego de las operaciones, pero esa atribución es acertada y falta entonces diferenciar las formas físicas o causales y las formas operatorias de equilibrio.

Ahora bien, la diferencia existe y es posible discernirla a partir de las conductas del estadio III (mientras que las consideraciones precedentes ya caracterizan el desarrollo que conduce del estadio I al estadio II): la noción física de lo

1. Efectivamente, las experiencias de B. Inhelder, H. Sinclair y M. Bovet sobre el aprendizaje de las estructuras operatorias, por un método que consiste en facilitar la toma de conciencia de los factores que la observación muestra como importantes en los progresos de esa estructuración, ponen en evidencia el papel esencial de ese paso de lo sucesivo a lo simultáneo, así como de las regulaciones resultantes. En estas experiencias se encontrará la prueba de lo que la observación del desarrollo permite únicamente sugerir.

virtual considera posibilidades cuyas compensaciones pueden ser simultáneas, pero cuyas realizaciones sólo son sucesivas, mientras que todas las posibilidades siguen siendo simultáneas para el pensamiento por el solo hecho de ser concebidas como posibles: lo propio del razonamiento hipotético-deductivo es incluso pasar directamente de las posibilidades a lo necesario poniendo en conexión a las primeras, sin utilizar como intermediario lo real; por otra parte es ese criterio lo que nos permite reconocer la aparición del pensamiento formal. En cuanto a su fecundidad, las matemáticas en su integridad tratan sobre lo posible y no es necesario insistir para ver que esa posibilidad sobrepasa ampliamente (y aún infinitamente en el sentido literal del término) las fronteras de lo real.

Es esta oposición de lo posible y de lo real la que explica finalmente las múltiples diferencias que subsisten entre las operaciones y la causalidad y que son tan evidentes que resulta inútil insistir al respecto: reversibilidad absoluta, conservación de los datos iniciales, deductibilidad íntegra, recurrencia ilimitada, intervención de lo infinito, etc. Atribuir las operaciones a los objetos no puede nunca significar más que el hecho de encontrar en éstos lo que es compatible con la duración y con las relaciones complejas que unen los observables a las estructuras sub-yacentes. Pero como la causalidad es un excipiente de éstas y no se limita a aquéllos, una sucesión indefinida de aproximaciones puede relacionar a los sistemas causales con los sistemas deductivos.

VII) En una palabra, la diferenciación de la operación y de lo causal depende de la constitución progresiva de formas extemporáneas. Pero subsisten tres interrogantes: 1) ¿Por qué esa investigación de lo extemporáneo?; 2) ¿Cómo llega éste a la constitución de «formas»? 3) ¿Cuál es su relación con las formas de los objetos en la causalidad entre objetos por oposición a la de la acción propia?

1) La tendencia a lo extemporáneo por medio de la equilibración y la reversibilidad obedece a una necesidad vital del pensamiento (y, en sus raíces, del propio organismo) que con-

siste en escapar a las contradicciones inherentes a los acontecimientos sucesivos y al tiempo, en otras palabras, en oponer cierta estabilidad al πάνταρεῖ de lo real. A partir de las regulaciones más elementales, que tienden a compensar las perturbaciones exteriores, hasta las operaciones formales superiores, que sólo tratan sobre lo posible, existe una búsqueda de coherencia y de estabilidad cuyo procedimiento constante consiste en sustraerse al tiempo.

2) Siendo así, y habiendo admitido que la acción propia es inicialmente causal y coordinadora a la vez, el paso de la acción a la operación se efectúa por una eliminación gradual de los factores dinámicos y cinemáticos que comportan la intervención de la duración: lo que subsiste entonces es un conjunto de realidades que es preciso llamar «formas» puesto que ya no son físicas, pero cuya naturaleza no puede ser precisada, so pena de mayores malentendidos, sino determinando de una manera sistemática en qué son más pobres o más ricas que las transformaciones causales a las que corresponden. Ahora bien, hemos comprobado a propósito de casi todas las variedades de la causalidad recapituladas en esta síntesis que nos encontramos en presencia de una sorprendente correspondencia entre las estructuras causales del objeto y las estructuras operatorias del sujeto, sin que pueda decirse ni que la segundas derivan sin más de las primeras, ni que la «atribución» de las segundas a las primeras signifique una simple proyección subjetiva. Existe, pues, cuando una estructura causal SC del objeto corresponde a una estructura operatoria SO del sujeto, un origen común SF que deberá buscarse en los mecanismos de la acción propia y muy especialmente en las funciones constituyentes F que expresan las dependencias regulares inherentes a dichos mecanismos. Si así fuera, y sin precisar aún los modos de abstracción simple o refleja que está en juego en el paso de SF a SC y a SO, sería absurdo presentar las «formas» SI como simples figuras o elementos estáticos, por estar privadas del dinamismo causal: esas formas SO son transformaciones operatorias comparables a las transformaciones causales, es decir igualmente susceptibles de «producción»

indefinida como su origen común SF, pero consistentes en construcciones formales y no en efectos materiales. En ese caso, desde cierto punto de vista, siguen siendo más pobres que las SC puesto que se elimina todo lo que depende del tiempo (siendo éste último la nota característica de la causalidad SC). Pero, por otra parte, existe un enriquecimiento equivalente puesto que la eliminación de la cinemática y de la dinámica temporales es ipso facto una apertura sobre el mundo infinito de los posibles. En cuanto a las relaciones con sus propios contenidos, en el caso de las operaciones aplicadas y aún atribuidas, éstas los enriquecen no solamente en relaciones nuevas y en estabilidad, sino también introduciendo ese carácter específico de toda deductibilidad que es la necesidad.

3) Si pasamos ahora de las relaciones entre dichas formas y la causalidad de los objetos, y no ya únicamente de la acción, se imponen dos observaciones. En primer lugar, no se puede considerar ni siquiera a las más generales de esas formas, es decir las de la lógica, como el residuo de las propiedades comunes a todos los objetos una vez descartados los factores cinemáticos y dinámicos: la concepción de la lógica como una «física del objeto cualquiera», sostenida por H. Spencer y en parte por Gonseth, olvida el carácter transformador o productivo de las operaciones, paralelo y no inferior al de la causalidad, y la fórmula no conserva una verdad sino modificada en «sistema de las acciones sobre el objeto cualquiera». En segundo lugar, en la medida en que hay correspondencia entre las transformaciones causales de los objetos y las transformaciones operatorias del sujeto, esto no significa que éstas sean extraídas de aquéllas (por simple eliminación de la dinámica en las relaciones descubiertas por experiencia física) ni tampoco la inversa (por simple proyección de las operaciones en lo real). Esa correspondencia se debe al hecho de que la acción propia es a la vez dependiente de las leyes físicas del objeto en general y fuente de las operaciones del sujeto. Pero para que éste reencuentre sus operaciones en lo real se necesita un largo desarrollo y una larga sucesión

de «atribuciones» que necesitan el concurso de un afinamiento gradual de la experiencia física y una elaboración progresiva de los instrumentos operatorios que la posibilitan: el problema que se plantea es, pues, el de las relaciones entre los dos tipos de abstracciones que suponen esas dos clases de actividades.

VIII) Dos datos fundamentales dominan los problemas del conocimiento físico y por consiguiente de las relaciones entre las operaciones del sujeto y la causalidad de los objetos. El primero ha sido proporcionado por múltiples estudios anteriores y no insistiremos más sobre él: la propia lectura de una experiencia exige el empleo de instrumentos de asimilación que hagan posible esa lectura; en otros términos, supone la utilización de estructuras operatorias. Por ejemplo, el hecho de juzgar que la cantidad de líquido se conserva en el curso de un transvasamiento implica medios al menos elementales de cuantificación, cierta transitividad (si se desea controlar las cantidades en A y en B de formas diferentes por medio de un recipiente C semejante al uno o al otro), etc. Por consiguiente, una abstracción «simple» o física, es decir que extrae su información del objeto, supone ya relaciones debidas al sujeto: «esta piedra es blanca» comporta así clases, una relación predicativa, etc., con independencia del lenguaje.

Segundo dato esencial: las conexiones causales, aunque se basan parcialmente en informaciones obtenidas por abstracciones simples (incluso cuando se trata de la acción propia, pues entonces los movimientos del sujeto, las resistencias que llega a vencer, etc., son para él objetivos observables como los otros), sobrepasan inevitablemente, en tanto conexiones, el campo de los observables. A partir de la causalidad perceptiva no se ve pasar nada del agente A al paciente B, pero, en función de los movimientos observados, se percibe (como se ha dicho) que «algo ha ocurrido»: ahora bien se trata de una reconstitución, debida únicamente a las regulaciones y preinferencias perceptivas pero ya comparables a las reconstituciones deductivas debidas a la misma inteligencia cuando se trata

de transmisiones de niveles más complejos. De hecho, nunca se observan más que desplazamientos o cambios cualitativos, así como velocidades, pero sólo se trata de manifestaciones exteriores de una relación causal que siempre se reconstruye por inferencias y que desborda así inevitablemente la frontera de los observables.

Recordemos ahora que debe distinguirse de la abstracción «simple» o física, que actúa sobre los observables, algunos de los cuales son entonces retenidos en oposición a otros, lo que podemos llamar «abstracciones reflejas»: en ese caso la información no es extraída de los objetos (o de la acción como objeto observable) sino de las acciones u operaciones del sujeto en tanto coordinaciones, pudiendo éstas ser reflejas en estado puro o depurado, o aún en ocasión de relaciones nuevas que dichas coordinaciones han introducido en los objetos (como, por ejemplo, ordenadas, clasificadas o contadas por el sujeto). La multiplicación es así abstraída de la adición (en tanto adición de adiciones), las proporciones lo son de las relaciones multiplicativas, la distributividad de las proporciones (ver el § 12), etc.

Por consiguiente, es obvio que la construcción de las operaciones reposa sobre procesos cada vez más ricos de abstracciones reflejas. Pero, ¿qué ocurre entonces con la causalidad, si ésta sobrepasa necesariamente lo observable, qué ocurre con los servicios que la investigación de la causalidad puede prestar a la formación de nuevas operaciones y, en una palabra, qué ocurre con los procesos de «aplicación» o de «atribución» de las operaciones a los objetos?

Dichos problemas se plantean a partir del nivel de las transformaciones espaciales y sobre todo de las funciones puesto que, en su origen, éstas expresan las dependencias o relaciones propias a los esquemas de la acción y que esta última «aplica» (en el sentido matemático de esa palabra) a los objetos. Las funciones como tales constituyen, como la acción, la fuente común de las operaciones y de la causalidad, puesto que expresan en pirmer lugar el esquematismo de las acciones. Ahora bien esa doble naturaleza se traduce de la siguiente

manera. Por un lado, si $y=f(x)$, las variaciones de x y de y pueden ser conocidas por abstracción simple si se trata de observables proporcionados por verificaciones efectuadas sobre los objetos o las acciones en su desarrollo perceptible. Pero la lectura misma de esos observables supone ya puestas en relación que dependen de la actividad coordinadora del sujeto: de ahí la covariación que agrega una relación a las variaciones; ocurre *a fortiori* lo mismo con la idea de dependencia (o aplicación unívoca a la derecha) con su orientación. En esos elementos de las relaciones interviene, pues, una parte de abstracción refleja, por mínima que sea, pero una parte necesaria como en toda estructura aplicada a lo real con miras a descubrir alguna regularidad. En segundo término, las covariaciones y dependencias de x y de y pueden ser debidas a las manipulaciones preoperatorias del sujeto (por ejemplo, por desplazamiento de los elementos de una colección hacia otra) y en ese caso el rol de la abstracción refleja se vuelve superior y la función comporta entonces su propia explicación o razón. Supongamos ahora que una dependencia funcional descubierta en lo real tenga la misma forma que una dependencia relacionada a esas actividades del sujeto: tenderá por eso mismo a sobrepasar la simple legalidad y a adquirir cierta necesidad por un proceso análogo a la «atribución» de la que depende la causalidad.

Las operaciones espaciales revelan una situación análoga. Por una parte, permiten al sujeto construir formas y transformar las unas en las otros según leyes estructurales enteramente deductibles, de ahí el papel necesario de las abstracciones reflejas. Por otra parte, los objetos comportan por sí mismos formas figurativas y una organización espacial que, como hemos visto (§ 9), están relacionadas con su dinámica de una manera análoga a la dependencia de las construcciones geométricas respecto de las acciones del sujeto. Esas propiedades espaciales del objeto pueden dar lugar a lecturas experimentales por un juego de abstracciones «simples» o físicas. Pero esa misma lectura supone instrumentos operatorios construidos por abstracciones reflejas y formando una misma cosa con las estruc-

turas (o formas operativas) de la geometría del sujeto. Existe pues en ese caso, lo mismo que en el de la función, una colaboración continua entre ambos tipos de abstracciones.

Volviendo a la causalidad, la situación resulta entonces paradójicamente tanto más clara, desde el punto de vista de los modos de abstracción, cuanto los hechos y las leyes cuya explicación se busca son conocidos por abstracciones simples; la conexión causal como tal sigue sobrepasando el campo de los observables. Debiendo entonces ser deducida, no puede serlo sino por medio de operaciones y la fuente de éstas no podría buscarse más que en el juego de las abstracciones reflejas. Pero dos circunstancias fundamentales complican este cuadro inicial: la atribución de dichas operaciones a lo real y, por el hecho mismo de serle atribuibles, la colaboración de los objetos a la constitución de las operaciones en devenir o al enriquecimiento por medio de nuevos morfismos de las estructuras ya constituidas.

La atribución de las operaciones a los objetos no plantearía ningún interrogante si sólo se tratara de un buen deseo o de una proyección espontánea del sujeto que actuara sobre los objetos y encontrara en ellos respuestas de una índole comparable a la ciencia. Pero, para estar bien fundada, una atribución debe ser verificada y esa verificación supone nuevamente la experiencia, necesaria para el control de las hipótesis explicativas como de las hipótesis que tratan del establecimiento de las leyes. Ese retorno a la experiencia exige entonces un juego de abstracciones simples como las del comienzo, pero guiadas esta vez por un sistema limitado de operaciones atribuibles. Se ve entonces la alternancia entre los dos modos de abstracción que implica la atribución de las operaciones a los objetos, y esto resulta obvio pues, en la medida en que se los promueve a la categoría de operadores, responden y corresponden a las operaciones del sujeto reflejo, aunque conservando su realidad de objetos exteriores.

Vemos luego las dos suertes de servicios que la causalidad presta a las estructuras operatorias, estimulando su formación por medio de contenidos que se prestan a tales construccio-

nes y multiplicando sus morfismos con ocasión de las atribuciones. Pero siendo dichos contenidos conocidos por abstracción simple, no dejan por eso de exigir para su lectura instrumentos operatorios debidos a la abstracción refleja. Solamente, como dicha estructuración de contenidos a los niveles de las operaciones «aplicadas» plantea nuevos problemas que las operaciones anteriores no alcanzan a resolver, nuevas construcciones operatorias se ven entonces favorecidas y así se estrecha la colaboración entre ambos modos de abstracción. Ocurre *a fortiori* lo mismo en el caso de la multiplicación de las atribuciones.

En una palabra, la causalidad constituye así el principal participante en el juego de vaivén que constituyen los intercambios de las operaciones del sujeto con lo real, por consiguiente no faltan razones para que sea difícil efectuar la separación, en cada explicación causal particular, de los aportes deductivos del sujeto y los que emanan de esa suerte de construcción deductiva inmanente que es la producción causal.

IX) Se trata sin embargo, a manera de conclusión, de tratar de precisar esas relaciones y de descubrir lo que los datos genéticos que citamos nos dicen acerca de la naturaleza de la causalidad.

El primer resultado de nuestros análisis es que la causalidad no se confunde con la legalidad, y eso a partir de nuestros estadios elementales tanto como en los diversos niveles del conocimiento científico. Una primera diferencia es, como ya hemos dicho, que la legalidad depende de la verificación y trata sobre relaciones observables (estas últimas, por otra parte, traducen habitualmente las regularidades debidas a las interacciones del objeto y a las manipulaciones del experimentador), mientras que las conexiones causales sobrepasan las fronteras de lo observable. En segundo lugar, la legalidad no alcanza sino a relaciones generales, mientras que la causalidad comporta relaciones necesarias. Incluso en una función $y=f(x)$, en la que se considera que las variaciones de y dependen objetivamente de las de x, dicha dependencia no constituye

sino un hecho que se comprueba, y no comporta en sí mismo ninguna necesidad intrínseca, mientras no esté acompañada por un principio de atribución causal. En efecto, y en tercer lugar, una ley, aun general, no puede permanecer aislada, mientras que su explicación causal comporta varias relaciones coordinadas dentro de un sistema y sólo ese sistema es fuente de necesidad. Por ejemplo, en la R 49, el sujeto descubre, mucho antes de comprender cuál es la razón, que dos hilos separados uno del otro 30° o 60° tienen una resultante inferior a la de los mismos pesos si los hilos son aproximados; pero esta ley, cuya verdad, al principio, se comprueba tan sólo a título de simple hecho general, no se hace necesaria sino una vez incluida en un sistema que coordine las intensidades y las direcciones e implique especialmente esa consecuencia de que dos fuerzas iguales y opuestas se anulan.

En cuarto lugar, la legalidad no comporta más que operaciones aplicadas a los objetos, mientras que en virtud de su triple carácter de sobrepasar lo observable, de alcanzar la necesidad y de constituir sistemas, la causalidad exige por añadidura una atribución de las mismas operaciones —pero incluyendo además las transformaciones o composiciones que éstas comportan—, a los objetos en sí mismos. Teniendo en cuenta que esta hipótesis constituye el centro de nuestra interpretación, es conveniente someterla a un examen retroactivo considerando los hechos descritos en los §§ 4 a 20. Es evidente que la legalidad implica el empleo de operaciones, y recordémoslo una vez más: desde el momento en que efectúa la lectura de los hechos hasta la generalización inductiva de éstos, el sujeto necesita relacionar, hacer clasificaciones, cuantificaciones, sin las cuales todo registro y toda asimilación serían imposibles. Por otra parte, también es obvio que, desde el punto de vista del sujeto en sí mismo, ese cuadro lógico-matemático que en realidad agrega o «aplica» a los objetos le parece formar parte de éstos, de tal manera que para la conciencia del sujeto no existe ninguna diferencia entre las operaciones aplicadas o atribuidas: en el niño pequeño las mismas palabras parecen al principio formar parte de las cosas; y con

mayor razón así será a todos los niveles de las relaciones, de los números, de las cantidades, etc., y finalmente de toda ley, concebida como expresión misma de lo real. En lo que el sujeto no se equivoca, mientras uno se atenga al fenómeno o a los observables, pero, para el observador, éstos no son aún más que el producto de una interacción entre las «cosas» y los instrumentos de asimilación de ese sujeto, de tal manera que para alcanzar efectivamente a los objetos es necesario efectuar un paso más y buscar bajo esos observables las conexiones causales que los relacionan: entonces, y solamente entonces, comienza la conquista del universo objetivo, es decir de un universo en el que los objetos existen y actúan como operadores, es decir en el que las operaciones pueden, pero esta vez legítimamente (aunque en forma muy parcial), ser según nuestro lenguaje «atribuidas» al objeto.

Por otra parte, no hay ahí, salvo en situaciones excepcionales o marginales (problemas demasiado nuevos, etc.), dos fases cronológicamente distintas, sino simplemente dos momentos en la elaboración de todo conocimiento físico, pues el sujeto rara vez permanece en la legalidad pura y, a la espera de interpretaciones correctas, no se priva de explicaciones aproximativas, como se ha visto constantemente. Es incluso probable que, desde el comienzo, sea la búsqueda de la causalidad lo que funcionalmente provoque la constitución de leyes a título de condición previa a la determinación de las causas.

Más aún, y, sin que eso baste para justificar la expresión abusiva de «leyes causales», hay que reconocer que en el interior mismo de la legalidad se encuentra ya a menudo un esbozo de causalidad, lo que es natural puesto que entre una relación aparentemente simple y una estructura propiamente dicha se pueden concebir muchos intermediarios por el juego de las diferenciaciones y coordinaciones combinadas. Por ejemplo, el de las R 33, etc., se asiste a un lento perfeccionamiento de las leyes del choque: una bola golpeada de costado se dirige primero en línea recta, luego oblicuamente y finalmente a lo largo de un trayecto rectilíneo que parte del punto de impacto y pasa por su centro, mientras que la bola activa

parte más o menos en ángulo recto: en ese caso, no estamos lejos de una estructura a base de acciones y de reacciones así como de composiciones de direcciones vectoriales; dicho de otra manera, de un sistema causal coherente, y es preparado por las aproximaciones legales. De la misma manera, una ley de conservación conduce tarde o temprano a una estructura vecina de un grupo, etc.

Pasemos entonces a considerar el segundo resultado general de nuestras investigaciones, es decir la interpretación de la causalidad en tanto estructuras operatorias atribuidas al objeto. Vemos en primer lugar que dichas operaciones «atribuidas» no son simplemente agregadas a las que eran «aplicadas» en la constitución de la legalidad: son las mismas operaciones (por lo menos al principio, pudiendo luego ser completadas por otras del mismo orden), siendo la única novedad el lazo deductivo, es decir las coordinaciones que las unen de allí en adelante. En efecto, un lazo deductivo no puede sino ser necesario, sobrepasar lo observable y constituir un sistema, es decir presentar las tres características diferenciales que señalamos anteriormente. Así lo propio de la causalidad es comportar siempre un sistema de transformaciones, sin poder reducirse a una simple relación de causa a efecto, como lo supone el sentido común. Aun en los casos en los que semejante relación parece existir, como en el ejemplo de un impulso, interviene en realidad una estructura elemental (compensaciones entre gastos y ganancias, composición de transformaciones y de conservaciones, etc., sin hablar de las direcciones), dicho de otra manera, un sistema deductivo. Pero entonces, ¿por qué esa deductividad provoca una atribución de la estructura, además de una simple aplicación? Sería fácil, según una tesis positivista o convencionalista que se encuentra frecuentemente, concebir el modelo así construido como un simple instrumento subjetivo, que satisface al espíritu sin que por eso corresponda a la naturaleza de las cosas, puesto que ni dicha naturaleza ni dichas cosas se imponen a un convencionalismo coherente.

La segunda evidencia que hemos creído percibir es que, por el contrario, en la medida misma en que se constituye el

sistema o modelo deductivo, las transformaciones que comporta y que relacionan entre sí a las operaciones, hasta entonces simplemente aplicadas a los objetos, no tienen significación (si se confirma por la experiencia y queda por lo tanto conforme a la legalidad así ampliada) sino en la hipótesis de que dichos objetos «existen», y por consiguiente las transformaciones invocadas expresan de una manera más o menos adecuada sus acciones reales.

El hecho es tanto más sorprendente cuanto que el sistema deductivo en que consiste la explicación causal no es un simple ensamblamiento de las leyes o de sus contenidos, por encadenamiento silogístico (del tipo de «el agua corre siempre porque es liviana», ensamblado en «las cosas livianas no se sostienen por sí mismas», etc., como en los jóvenes sujetos de la R 23), sino una composición de las mismas operaciones aplicadas, y esto por medio de procedimientos generales de coordinación o de transformaciones operatorias: la transitividad, la multiplicatividad, la reciprocidad, etc. En efecto, esas formas generales de organización preparatoria son constitutivas de las estructuras, en la medida en que sus composiciones internas se cierran sobre sí mismas con necesidad. Ahora bien, es en ese caso precisamente que la coordinación de las operaciones aplicadas no podría aparecer como una simple necesidad relativa al sujeto y parece apoyar las relaciones legales en un substrato exterior y característico de la causalidad que conduce a la «atribución» de la estructura a lo real.

La razón es que un fenómeno transformado en otro llega a ser algo más que una conjunción de dos fenómenos y que la conexión inobservable así construida adquiere un poder de objetivación en la medida en que está ligada a una estructura. Cuando una acción del sujeto, primero libre y aislada, es relacionada a otras en el seno de una estructura operatoria, ésta adquiere también una suerte de objetividad, pero «intrínseca» y que no requiere ninguna hipóstasis o exteriorización. Por el contrario, cuando una operación aplicada al objeto (con un éxito experimental que hace legítima esa aplicación) es coordinada a otra igualmente aplicada de manera válida, entonces

la estructura que ellas constituyen requiere, en razón de esas aplicaciones acertadas, una objetivación de naturaleza extrínseca; finalmente, como la estructura sale de la frontera de los observables, llega a ser, en virtud de esa objetivación, constitutiva de objetos que sobrepasan los fenómenos y cuyas acciones causales corresponden a las transformaciones del sistema. Tales parecen ser las razones de las numerosas «atribuciones» de estructuras operatorias descritas anteriormente.

Por ejemplo, para las transmisiones de movimientos de la R 2, la legalidad fundada en los observables no proporciona más que la regularidad, discutida por Hume, de la partida de una bola chocada por otra, y, en el caso de una hilera de intermediarios contiguos, tan sólo la comprobación de la partida de la última bolita, que no ha sido tocada por la bola activa. Desde los niveles más precoces, la primera de esas dos regularidades se acompaña, como hemos visto, de una impresión causal, que ya reposa sobre una «estructura» elemental: pérdida del movimiento de la bolita activa y ganancia de la pasiva, es decir un compuesto de transformación y de conservación que basta para explicar la transmisión bajo su forma «externa», pero que no explica «cómo»; en ocasión de la partida de la última bolita de una hilera, ese modelo es simplemente generalizado, lo que explica aún menos el «cómo». Lo propio de la transformación operatoria constituida por la transitividad es, por el contrario, reunir en un todo a las diversas comprobaciones legales, con sus comienzos correspondientes de causalidad, pero local (un choque + un choque + etc.), lo que permite entonces una atribución a los objetos bajo la forma de la transmisión de una «corriente» que los atraviesa: a un conjunto de estructuras locales, cada una de las cuales sobrepasa ya en tanto estructura la pura legalidad y comporta por consiguiente un comienzo de atribución; se substituye, pues, una estructura de conjunto cuyo grado de atribución es sensiblemente más «fuerte». Lo mismo en las múltiples situaciones observables de acción y de reacción, la legalidad no proporciona sino regularidades bajo la forma de disminución de velocidad o retornos, y los comienzos correspondientes de causalidad no pueden

consistir sino en modelos de freno o de rebote por desviación de impulsos, etc.: por el contrario la estructura total proporcionada por la coordinación de las inversiones y reciprocidades permite la atribución general a los objetos de una fuerza de reacción en respuesta a las acciones, etc.

Es sorprendente comprobar que, a partir de los modestos hechos observados con respecto a la psicogénesis de la causalidad, se asiste a una evolución que, bajo ciertos aspectos, presenta una analogía con la de la física contemporánea [1]. La del siglo XIX consistía esencialmente en tomar medidas y descubrir leyes, lo que no requiere otros instrumentos lógico-matemáticos que las operaciones «aplicadas» a los objetos. Por cierto, las tendencias a la «atribución» ya eran frecuentes, pero por otra parte generalmente combatidas: por ejemplo las hipótesis atomísticas, debidas a las estructuras operatorias de partición, o la creencia en la existencia de fuerzas en la expresión $a = f{:}m$ o también $m = f{:}a$ (Euler), en lugar de ver en ellas simples relaciones $f = ma$. Por el contrario, el espíritu de la física contemporánea se orienta hacia la investigación de las estructuras, que se expresarán bajo la forma de modelos axiomatizables que relacionan a las leyes por medio de una deducción necesaria, fundando entonces en razón la posibilidad de una serie de atribuciones. Lo que asegura en ese caso la legitimidad de dichas transformaciones, atribuidas a los objetos, es su necesidad operatoria, como, por ejemplo, cuando una ley de conservación es integrada en un grupo que exige su intervención. Por cierto, los axiomas de dichos modelos son sugeridos por los hechos y las deducciones extraídas se controlan por medio de los hechos, pero la característica más notable de esta física teórica sigue siendo que es en la medida en que ha dado un paso más en la dirección de la construcción lógico-matemática que las transformaciones necesarias así alcanzadas en el plano de lo posible y de las estructuras abstractas pueden

1. Excepto que, al nivel del pensamiento científico, la «aplicación» y la «atribución» de las operaciones son más diferenciadas y, por consiguiente, a menudo desplazadas.

dar lugar a «atribuciones» más profundas y más justificadas. Es esta sorprendente adaptación entre las coordinaciones operatorias del sujeto y las conexiones causales de los objetos algunas de la que hemos estudiado en algunas etapas preliminares.

X) En resumidas cuentas, las operaciones constituyen algo así como una causalidad aplicable a las formas extratemporales y la causalidad física un sistema de operaciones efectuadas por los objetos materiales. La razón de esas correspondencias es que la fuente de las operaciones debe ser buscada en las regulaciones orgánicas y el organismo es un objeto físico sometido a la causalidad, como un objeto entre otros. Pero entonces, ¿por qué el sujeto no conoce, mediante la interpretación de su propio organismo, el conjunto de las causas y de los efectos de los cuales es sede, o por lo menos el conjunto de aquéllos que rigen sus intercambios con el medio? Porque el conocimiento no es un reflejo sino una actividad y nuestros conocimientos de la causalidad son algo diferente de esta última y proceden por aproximaciones muy laboriosas. Ahora bien, éstas últimas no se inician sino a partir de las acciones, es decir, de las formas superiores del intercambio entre el organismo y los objetos exteriores a él. Pero si bien la acción sufre todos los procesos causales del organismo y del medio, no toma conciencia de ello sino en la medida de su propia regulación activa: de ahí la primacía inicial de la causalidad mecánica relacionada con acciones manuales bien controladas, etc., y el retraso considerable de las nociones sobre el calor o la luz.

Ahora bien, si la estructuración cognoscitiva comienza así en la periferia del organismo, es decir por medio de acciones y con tomas de conciencia que dependen de la extensión de las regulaciones, entonces es posible comprender la estrecha solidaridad de los progresos (o de sus retrasos) en la doble dirección de la conquista de lo real, con la causalidad, y del desarrollo de las regulaciones y operaciones, es decir de las coordinaciones internas del sujeto. Se comprende principalmente que, a todo progreso de esas estructuras endógenas, que proceden por abstracciones reflejas, corresponde un afinamiento de la

experiencia y de las abstracciones físicas o simples y, recíprocamente, no siendo la complementaridad solidaria de esos dos modos de abstracción en definitiva más que la expresión de dos movimientos interdependientes, aunque de direcciones opuestas, de exteriorización en la captación de lo real y de interiorización en la elaboración de los instrumentos de asimilación.

BIBLIOGRAFIA

(Investigaciones que se publicarán en los *Estudios de Epistemología genética*).

1. El movimiento transitivo, con M. BOVET.
2. La transmisión mediata del movimiento, con A. SZEMINSKA y E. FERREIRO.
3. Controles de la estabilidad de los estadios de la transmisión mediata del movimiento, con E. FERREIRO.
4. La doble transmisión del movimiento, con A. SZEMINSKA.
5. La descomposición de las direcciones, con E. FERREIRO.
6. Transmisión o inercia en la caída de bolas que caen de una canaleta, con O. MOSIMANN.
7. Los engranajes, por P. GRECO.
8. La transmisión por correas, con O. de MARCELLUS y N. BURDET
9. Una forma elemental de transmisión del movimiento, con M. LABARTHE.
10. La transmisión de las vibraciones entre dos diapasones, con Th. VERGOPOULO.
11. Atracción de los imanes, con M. CHOLLET.
12. La transmisión mediata del movimiento en el agua, con S. UZAN.
13. Bloqueos y desbloqueos, con F. VERGNAUD.
14. Transitividad lógica y transmisión mediata de materia, con J. BLISS.

15. Equilibrio de un sólido sostenido por otros (la regla y el platillo de la mesa), con P. PETROGALLI.
16. El centro de gravedad, con R. MAIER.
17. La composición vectorial de las fuerzas sobre un platillo circular, con M. CHOLLET.
18. Suspensiones y contrapesos (cesto de ensalada), con J. BLISS.
19. Las fuerzas necesarias para hacer subir un vagón o para retenerlo en una pendiente, con A. PAPERT.
20. El equilibrio indiferente, con O. MOSIMANN.
21. Solubilidad, miscibilidad, y flotación, con J. F. CHATILLON.
22. La difusión de un sólido en un líquido, con E. FERREIRO.
23. Los estados de la materia, con J. BLISS.
24. Los cambios de estados líquido y sólido, con P. MOUNOD y A. CATTIN.
25. Los cambios de estado de la parafina de una vela, con J. BLISS.
26. El destilador de Franklin, con S. UZAN.
27. El olor y el vapor, con A. PAPERT.
28. Efectos de empuje o de tracción ejercidos sobre varillas, con P. MOUNOUD.
29. Empuje de una punta contra una placa, con I. FLUCKINGER-GENEUX.
30. La tracción y el equilibrio de las plaquetas, con I. FLUCKINGER-GENEUX.
31. Relaciones entre direcciones del lanzamiento y del empuje con objetos colectivos, con C. DAMI.
32. El empuje de varas articuladas, con C. ROSSEL y Ch. OTHENINGIRARD.
33. El choque de las bolas, con R. MAIER.
34. El choque de una bolita contra los costados de una caja circular, con J. BLISS.
35. Choque de las bolas y manipulaciones libres, con M. ROBERT.

36. Los cambios de dirección de una bola que choca contra una pared, con J. BLISS.
37. La incidencia y el reflejo de las imágenes en un espejo, con B. INHELDER.
38. La verticalidad de una vara, con A. PAPERT.
39. La horizontalidad del agua, con A. PAPERT.
40. La caída del agua que sale por un tubo en traslación, con Ch. OTHENIN GIRARD.
41. El empuje espacio-temporal y la fuerza, con A. SZEMINSKA.
42. El trabajo, con R. MAIER.
43. Altura y longitud en el descenso de una bolita en un plano inclinado, con A. SZEMINSKA.
44. La composición de las fuerzas en horizontal, con P. MOUNOUD.
45. La composición de las fuerzas en vertical, con J. BLISS.
46. La aditividad de las fuerzas en un resorte, con C. DAMI.
47. La aditividad de las fuerzas en direcciones opuestas, con M. ROBERT.
48. La composición de los pesos, con C. ROSSEL.
49. Un problema de composición de las fuerzas, con M. ROBERT.
50. El efecto de verificaciones variadas del sujeto sobre el desarrollo de las composiciones de fuerzas, con M. CHOLLET.
51. 52. La composición de las fuerzas con elásticos (honda, etc.).
53. Composición lineal elemental en un sistema de dos fuerzas, con R. MAIER.
54. La distributividad en el caso de la extensión de los elásticos, con G. CELLERIER y D. MAURICE-NAVILLE.
55. La distributividad en el trasvasamiento de los líquidos, con M. ROBERT.
56. Retorno de una pelota de ping-pong sobre sí misma, con A. PAPERT.
57. Un mecanismo de rotación y de enrollamiento, con P. MOUNOUD.

58. La coordinación de dos movimientos distintos, con P. MOUNOUD.
59. El movimiento ondulatorio, con R. MAIER.
60. Las ondas y las olas, con M. LABARTHE.
61. Ascenso del agua en un tubo helicoidal, con C. FOT.
62. Acción y reacción entre dos empujes de sentidos opuestos, con G. VOYAT.
63. Propulsión de un globo, con O. MOSIMANN.
64. El rebote, con P. MOUNOUD.
65. El descenso de un sólido en un líquido, con E. SCHMID.
66. Ejemplo de causalidad circular (*feedback*), con J. BLISS.
67. Dos acciones de direcciones aparentemente contrarias (humo), con C. FOT.
68. Las bolitas en un vidrio de reloj, con C. FOT.
69. Una buena forma circular (jabón), con A. PAPERT.
70. Las reacciones a la inercia, con I. FLUCKIGER-GENEUX.
71. La fuerza centrífuga, con A. MUNARI.
72. El fluir del agua, con E. SCHMID.
73. Situaciones de equilibrios (el corcho, etc.), con R. MAIER.
74. La tracción en un plano inclinado, con O. MOSIMANN.
75. Los efectos del peso y del volumen de un guijarro en el agua, con A. PAPERT.
76. La flotación de un sistema de dos cuerpos de densidades diferentes, con CH. GILLIERON.
77. Acciones del peso y posición de los objetos, con A. PAPERT.
78. El desarrollo de la noción de presión, con D. MAURICE-NAVILLE.
79. La caída del agua en función de la presión, con D. MAURICE-NAVILLE.
80. El equilibrio de los vasos comunicantes, con Ch. GILLIERON.
81. Carretillas y palancas, con P. MOUNUOD.
82. La desmultiplicación en función del tamaño de las poleas (principio del torno), con Th. VERGOPOULO.

83. La desmultiplicación en función del número de poleas o de hilos, con Th. VERGOPOULO.
84. Conservación del momento cinético en un carrusel, con M. FLUCKIGER.
85. La transmisión de la energía entre dos péndulos unidos, con L. LANNOY.
86. Los intercambios de calor entre el agua y bolas de metal, con A. PAPERT.
87. La conductibilidad del calor, con A. PAPERT.
88. Cuantificación y transmisión del calor (axioma de Clausius), con O. de MARCELLUS.
89. La visión y la luz, con A. PAPERT.
90. Los colores, con A. MUNARI.
91. La proyección de la luz y del calor, con J. de LANNOY.
92. Del objeto auditivo a la vibración sonora, con M. LABARTHE.
93. La ley de Pitágoras, con M. LABARTHE.
94. Jeringa y presión del aire, con H. PERDIKIDI.
95. El manómetro, con M. ROBERT.
96. La presión ejercida sobre y por el aire (ludion), con M. DEPOTEX.
97. Papel de aire en el fluir del agua de una lata de conserva, con M. DEPOTEX.
98. Movimiento ascendente debido al calor (papel), con M. ROBERT.
99. El aire caliente en una espiral de papel, con M. ROBERT.
100. Acción del aire sobre una hélice y problema de la conservación de los pesos, con J. VONECHE.

SEGUNDA PARTE

EXPLICACIONES FISICO-GEOMETRICAS Y REDUCCIONISMO

por R. Garcia y J. Piaget

La ambición constante de la epistemología genética ha sido tratar de relacionar las cuestiones que se plantean a propósito de los niveles más elementales del conocimiento con las que suscita la teoría del propio pensamiento científico. De hecho, problemas tales como los de la formación del número, el papel de las correspondencias o «aplicaciones» de las relaciones entre las nociones de tiempo y de velocidad, de las relaciones entre la permanencia de los objetos y la localización espacio-temporal, etc., nos han no solamente permitido sino incluso obligado a intentaı ese tipo de aproximaciones, pues parece casi evidente que los destinos actuales de esos conceptos o estructuras no son completamente independientes de su modalidad de elaboración desde sus raíces precientíficas.

Recientemente, se nos han presentado de manera especial dos problemas, a propósito de la psicogénesis de las explicaciones causales, que aparentemente se vuelven a encontrar en todas las etapas del desarrollo de la física y cuyos términos han sido renovados por algunos trabajos recientes de la física teórica. El primero es el de las operaciones geométricas del sujeto y el espacio de los objetos, en tanto aquéllas dependen de las estructuras lógico-matemáticas y éste de la experiencia física. El

segundo se refiere a las relaciones entre ese espacio físico y la dinámica, y la cuestión consiste en establecer hasta qué punto la geometría de los objetos sigue siendo necesariamente solidaria de un modelo dinámico, y no únicamente cinemático, o si se vuelve independiente con respecto a éste pudiendo llegar, como lo piensan algunos contemporáneos, a un retorno al postulado cartesiano de una reducción total de los fenómenos a «figuras» y «movimientos».

Nos gustaría presentar en esta nota una discusión sobre esos dos problemas, combinando los recursos de la epistemología genética y del análisis epistemológico inherente a la física teórica, constituyendo por lo tanto este ensayo un intento de investigación interdisciplinaria.

I. *LOS DATOS DE LA EPISTEMOLOGIA GENETICA*

§ 1 /OPERACIONES GEOMETRICAS Y ESPACIO DE LOS OBJETOS

Recordemos en primer lugar que, remontándonos a las formas más elementales del saber, comprobamos a todos los niveles la distinción esencial entre los conocimientos físicos (en un sentido amplio) y las relaciones lógico-matemáticas, como lo admiten tantos autores, inclusive los positivistas contemporáneos. Pero esta oposición no se reduce a la de los juicios sintéticos y analíticos, como ha demostrado Quine y como hemos verificado al mostrar la existencia de numerosos intermediarios genéticos entre sí [1]. Tampoco podríamos identificarla a la distinción del lenguaje y de la experiencia: por un lado, en efecto, se encuentra a partir del nivel de los esquemas sensorio-motores anteriores al lenguaje relaciones de orden, de ensamblamientos, correspondencias, etc., que ya dependen de estructuras lógico-matemáticas; por otra parte, además de la experiencia física que extrae su información de las propiedades del objeto, se puede hablar de una experiencia lógico-matemática cuando la información es abstraída de las acciones u operaciones ejercidas por el sujeto sobre los objetos o de las propiedades (orden, clases, sumas, etc.) que esas acciones introducen momentáneamente en los objetos. En esa perspectiva se puede admitir que el conocimiento físico procura alcanzar al objeto,

1. Vol. IV de los *Estudios.*

descentrándolo del sujeto, mientras que las relaciones lógico-matemáticas expresan en su origen las coordinaciones generales de la acción, incluyendo a aquéllas que se encuentran en todo lenguaje formalizable y, finalmente, en toda estructura operatoria.

Además, lo propio a los espacios del sentido común es poder dar lugar a la vez a construcciones operatorias de naturaleza deductiva, como en el caso de los espacios matemáticos, y a comprobaciones físicas que dependen de experiencias que tratan sobre los objetos. A partir de los niveles más elementales, e incluso sensorio-motores, se pueden distinguir estos dos polos: la construcción del grupo práctico de los desplazamientos entre los 12 y los 18 meses comporta así mecanismos inferenciales, mientras que las múltiples percepciones relativas a las formas y tamaños de los objetos depeden seguramente de datos inherentes a la experiencia física.

En lo que se refiere al aspecto operatorio y deductivo del espacio, es particularmente sorprendente comprobar el estrecho paralelismo que relaciona genéticamente la formación de las operaciones espaciales y de las operaciones lógico-aritméticas, aunque las primeras tratan sobre lo contínuo y las relaciones de vecindad mientras que las segundas agrupan a los objetos discretos según sus semejanzas y diferencias cualitativas: el ensamblamiento de las partes de un contínuo, el orden de las posiciones, la medida por síntesis de esas particiones y del desplazamiento ordenado de la unidad, las coordenadas, etc., se construyen así en corespondencia (pero no por filiación simple) con las inclusiones de clases, las seriaciones, el número por síntesis de los ensamblamientos y del orden, las estructuras multiplicativas (productos cartesianos, multiplicaciones seriales, etc.) de dos o tres dimensiones lógicas, etc.

En cuanto a las comprobaciones empíricas que dependen del espacio físico, es preciso señalar particularmente que, si bien alcanzan a ciertas propiedades de los objetos, es decir ciertos datos que existen independientemente de las actividades del sujeto, no llegan a ellos sino por intermedio de las operaciones precedentes, o de preoperaciones que las anuncian, y

que son entonces «aplicadas» a dichos objetos. Desde el momento de percepción de las «buenas formas» geométricas, como un círculo o un cuadrado, intervienen esquematizaciones en el doble sentido del «esquema» simplificador de Gonseth y de los «esquemas de asimilación», sobre el papel de los cuales uno de nosotros ha insistido constantemente: por ejemplo, si se trata de medir la resistencia de una buena forma perceptiva (entre otras maneras, agregando penachos a los lados superior e inferior de un cuadrado, como por ejemplo en la ilusión de Müller-Lyer, lo que tiende a volverlos perceptivamente desiguales), se comprueba que dicha resistencia varía en función del nivel operatorio del sujeto, etc. La conservación de las longitudes en caso de desplazamiento (lo que equivale por ejemplo a admitir la indeformabilidad de una regleta que se desplaza algunos centímetros) no es reconocida por el sujeto (hacia los 9 años) sino cuando logra estimar métricamente dichas longitudes (intervalo comprendido entre los extremos) y corregir así las estimaciones ordinales iniciales (orden de los puntos de llegada o consideración de los excedentes en el sentido del movimiento, de ahí el criterio «más largo = llega más lejos»). La horizontalidad del nivel del agua no se admite sino por medio del empleo de referencias interfigurales, mientras que, hasta alrededor de los 9 años, dicha superficie no es prevista sino en función de una referencia intrafigural, es decir de la forma del recipiente que se inclina, etc.

En una palabra, existen desde el comienzo un espacio operatorio y propiedades espaciales inherentes a los objetos, pero el primero no deriva simplemente de las segundas, ni inversamente, y las segundas no pueden ser alcanzadas sino por intermedio del primero. Pero las operaciones espaciales de las que hemos hablado hasta ahora no son todavía, en esta última situación, sino operaciones «aplicadas» al objeto, es decir utilizadas por el propio sujeto en sus lecturas de la experiencia, como instrumentos para registrar o asimilar a la intención de sus propias comprobaciones, pero sin referencia a la causalidad de los objetos.

Un segundo problema se plantea entonces de inmediato:

¿en qué consiste ese espacio físico o espacio de los objetos? ¿Es también de naturaleza operatoria o su estructura es diferente, y más o menos ajena a la de las operaciones de las que el sujeto se sirve para alcanzarlas? En el caso de la horizontalidad del nivel del agua, por ejemplo, para el sujeto que se vuelve capaz de comprobarlo, ¿es el agua por sí misma lo que da a la superficie una forma plana y horizontal y no el experimentador, aunque éste último incline el recipiente en diferentes posiciones: en ese caso, cómo se las arregla el agua (en la interpretación del sujeto)? Desde el punto de vista de esta investigación de la explicación causal, es, pues, el agua, en tanto objeto independiente del sujeto, lo que se convierte en un operador espacial puesto que se da una forma y la reconstituye sin cesar a pesar de los cambios de orientación del recipiente. Hablaremos en este caso de operaciones «atribuidas al objeto» y no ya únicamente «aplicadas» por el sujeto como instrumentos necesarios a la lectura.

Ahora bien, las múltiples investigaciones sobre la causalidad nos han mostrado que ésta se reduce precisamente a conjuntos de operaciones atribuidas a los objetos, dicho de otra manera a estructuras operatorias consideradas como inherentes a lo que «hacen» los objetos en sus interacciones múltiples. El problema es entonces determinar cuál es el papel del espacio físico, o de las operaciones espaciales atribuidas a los objetos, en el seno de esas estructuras causales.

§ 2 / EL ESPACIO DE LOS OBJETOS Y LA CAUSALIDAD FISICA

Una primera diferencia evidente entre el espacio operatorio del sujeto y el espacio físico de los objetos es que éste último es espacio-temporal, mientras que las operaciones espaciales del sujeto son extratemporáneas. Es así que un desplazamiento operatorio no es más que un cambio de posición (a seis parámetros cuando se lo mide), mientras que un movimiento real o físico toma tiempo y comporta por consiguiente una velo-

cidad. Aun las formas estáticas de los sólidos son función de la duración, puesto que se conservan durante un tiempo más o menos largo según el grado de indeformabilidad de los objetos que ellas caracterizan. En todos los niveles de desarrollo, la geometría de los objetos, es, pues, solidaria de una cinemática, y esto no plantea un problema psicogenético dado el carácter extremadamente precoz de la noción de velocidad, fundada inicialmente en la intuición ordinal del excedente (como las longitudes) mucho antes de ser considerada como una noción e:t. La única cuestión que puede señalarse desde ese punto de vista de las estructuras espacio-temporales es la heterogeneidad inicial de los espacios llenos y vacíos. Cuando, por ejemplo, no se interpone ningún sólido entre dos objetos A y B, la distancia AB es, hasta los 7-8 años, estimada mayor que si se ubica una pared entre A y B: en ese caso el espesor del muro es de otra naturaleza espacial y debe ser entonces deducido, mientras que si la pared tiene agujeros la distancia sigue siendo la misma. La homogeneización de las logitudes plenas y de las distancias vacías plantea entonces un problema y es probable que su solución esté relacionada con la constitución de los sistemas de referencia, por consiguiente con las relaciones interfigurales, pero puesto que éstas dependen igualmente del progreso de las interacciones causales, como vamos a ver, esta cuestión pertenece al conjunto de las que quedan por abordar.

En efecto, si el espacio físico es solidario de una cinemática, el análisis psicogenético muestra igualmente que, a todos los niveles de desarrollo, está estrechamente relacionado con interpretaciones dinámicas. Un razón de carácter general hace que se lo comprenda desde el principio: hasta la edad de 9 años aproximadamente la fuerza no es disociable del movimiento, no solamente porque ninguna fuerza es concebible sino en movimiento («impulso», etc.), lo que dura hasta los 11-12 años, sino también porque, hasta los 7-8 años inclusive, todo movimiento engloba una fuerza, bajo la forma de un «motor interno» (como lo admitía Aristóteles) y aun cuando se reconoce además la necesidad de un «motor externo». La noción pri-

mitiva parece ser la de la «acción» en el sentido de fte o de mve, lo que hace que toda cinemática sea solidaria de una dinámica. La indiferenciación del movimiento y de la fuerza, por otra parte, se ha reencontrado periódicamente en la historia de la física, y todavía encontramos rastros de ella en algunos malos manuales a propósito de la «fuerza» centrífuga, lo que ha dado lugar a severas observaciones por parte de Hertz.

Un primer ejemplo de esa solidaridad entre el espacio físico y el dinámico es el de la conservación de las longitudes, que ya hemos citado desde el punto de vista de las operaciones «aplicadas» por el sujeto a la comprobación de los hechos, pero que ahora consideramos nuevamente en la perspectiva de las operaciones «atribuidas» al objeto. En efecto, desde ese segundo punto de vista, el movimiento de una regleta A que se desplaza respecto de otra B, después de haber verificado el sujeto, por superposicón, la congruencia A = B, depende de un operador espacial, pero el problema (para el niño hasta los 9 años aproximadamente) consiste en saber cuál. Ahora bien, si puede reducirse a un simple operador de desplazamiento en el caso en que la longitud del objeto se reconoce como invariante, puede también consistir en un operador de alargamiento o de estiramiento, como si la regleta fuera elástica. En realidad, la observación muestra —y es aquí adonde interviene la dinámica— que esos dos operadores siguen siendo indiferenciados durante mucho tiempo, y eso por razones a la vez dinámicas (índole del movimiento transmitido en tanto fte) y geométricas (falta de referencias). Por un lado se considera que la regleta se alarga y no solamente se desplaza: el sujeto afirmará así fríamente que el excedente de A respecto de B es mayor que el excedente recíproco que, sin embargo, se percibe al otro lado (B respecto de A). Por otra parte, cuando se le hace notar el alargamiento de un elástico (o bien el de tres resortes unidos por sus extremos después de haber el niño verificado que sus estiramientos son iguales cuando están colgados paralelamente y dotados de los mismos pesos), ese alargamiento se concibe como un simple desplazamiento de las extremidades que se tiran (con ausencia total de distributividad o de dila-

tación homogénea, aun en el caso de los tres resortes). Existe pues indiferenciación entre los desplazamientos (aditivos) y los alargamientos (multiplicativos) y la razón es sin lugar a dudas que el móvil pasivo comporta aún un «motor interno». Cuando, por el contrario (hacia los 9-10 años), las nociones de movimiento y de fuerza están suficientemente diferenciadas, el móvil pasivo soporta simplemente los efectos de una fuerza activa y sus movimientos pueden entonces ser distinguidos según las dos clases del desplazamiento y del alargamiento, por comparación de los puntos de partida (fijos en el caso del elástico o de los resortes retenidos, variables en el caso de la regleta) y de los puntos de llegada, así como por referencia con un sistema exterior. Se comprueba al mismo tiempo que dichas relaciones simplemente geométricas (referencias internas o externas) que hubieran podido parecer accesibles independientemente de toda dinámica, no se elaboran en realidad sino después de haber sido suficientemente diferenciadas las fuerzas y los movimientos.

Esta solidaridad de las referencias espaciales y de la dinámica, que ya es clara, pero que sorprende en un problema tan simple como el de la conservación de las longitudes, es aún más evidente en el caso de las coordenadas naturales, vertical y horizontal. Es así que la horizontalidad de la superficie del agua no es anticipada (en ocasión de las inclinaciones del recipiente) y ni siquiera comprobada (si no, la lectura como tal sigue siendo inexacta) más que en el nivel en el que se la comprende causalmente. Hasta los 9 años aproximadamente es «liviana» y se esparce por cualquier parte. Cuando se vuelve «pesada», tiende por el contrario hacia abajo y, en caso de nivel momentáneamente inclinado, las capas superiores tienden a deslizarse sobre las inferiores hasta igualarse en un nivel medio horizontal. De igual manera, en lo que se refiere a la vertical, hasta los 9 años aproximadamente, se considera que una varita inclinada que se suelta en ciertas ocasiones, cae en el mismo sentido de su inclinación y no verticalmente, mientras que al nivel en que se elaboran las coordenadas naturales, su caída es vertical cualquiera que sea su orientación inicial: también

aquí ese proceso dinámico en la interpretación del papel del peso interfiere necesariamente, como en el caso del agua, con la elaboración de referencias espaciales. Recordemos a ese respecto que, según los jóvenes sujetos, se necesita más fuerza para retener en su lugar a un vagón que se encuentra en un plano inclinado que para hacerlo subir, pues, estando inmóvil, tiene tendencia a bajar mientras que si se tira de él hacia arriba, esa tendencia desaparece inmediatamente. A partir de los 8-9 años esa tendencia se generaliza y es la conquista tardía de esa dinámica del descenso o de la caída lo que interviene en los aciertos de las pruebas precedentes.

Otro campo en el que los factores espaciales se entrecruzan sin cesar con la dinámica es el de las direcciones. Cuando los niños empujan una plaqueta con un lápiz en un lugar que no sea el centro, no esperan en absoluto que ésta gire, sino que piensan en cambio imprimirle un movimiento «recto» hacia adelante. Igualmente, cuando una bola choca con otra de costado, se considera que la bola pasiva parte en la prolongación del trayecto de la activa, etc. En ese tipo de pruebas, la coordinación de las traslaciones y de las rotaciones o las desviaciones de dos bolas cuando el choque no se produce en línea horizontal, no son comprendidas sino una vez admitido el papel de las resistencias y la geometrización no progresa sino en función de la solución progresiva de los problemas dinámicos. De igual manera, la ley de la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión, en el caso de los choques contra una pared rectilínea, no se prevé sino en la medida en que el sujeto entrevé modelos del tipo acción y reacción.

En una palabra, el espacio físico adquiere ciertamente una estructura operatoria en razón de las operaciones geométricas del mismo sujeto, pues éste no sabría atribuir a los objetos otras operaciones espaciales que aquellas que ha podido dominar en sus acciones propias. Pero esto no significa que la dicha geometría se desarrolle en un sentido único en la dirección del sujeto a los objetos: por el contrario, es en la medida en que los problemas dinámicos requieren nuevas estructuraciones que éstas son elaboradas poco a poco, de tal suerte que, finalmente,

todo el espacio de los objetos podría ser deducido de su dinámica. Por cierto, ésta última comporta en sí misma operaciones espaciales, y, como se ha visto, la lectura como tal de las relaciones en juego supone ya operaciones aplicadas. Pero cuando se trata de pasar de la aplicación a la atribución, el espacio de los objetos no podría estar disociado de los otros componentes y es en el seno de las interpretaciones causales, en la totalidad de cada sistema explicativo particular, que se completa y acaba la geometrización. Es por lo tanto posible concluir que, por más correspondientes que sean entre sí las operaciones geométricas del sujeto y los operadores espaciales que se prestan a los objetos, los primeros siguen estando más ligados a las operaciones lógico-aritméticas, mientras que los segundos adquieren una significación constantemente dinámica.

§ 3 / LAS CUESTIONES DE REDUCCION O DE ASIMILACION RECIPROCA

Las explicaciones causales que puede alcanzar el niño, aun en el estadio de 11-12 a 15 años durante el cual se desarrollan las operaciones proposicionales o formales, la combinatoria y los grupos de cuaternalidad, no son los suficientemente avanzadas como para que se pueda buscar fructíferamente si revelan una reducción progresiva de la mecánica a la geometría o si se orientan en la dirección de una asimilación recíproca entre los dos conjuntos de factores. Es cierto que su unión cada vez más íntima, especialmente en el caso de las composiciones vectoriales (11-12 años), en el seno de las cuales el sujeto comprende la modificación de las resultantes en caso de intensidades constantes y de direcciones variables o a la inversa, parece indicar una integración progresiva en sentido doble. Por otra parte, la solidaridad constante que hemos señalado entre el espacio físico y la dinámica parece sugerir que, si ésta se impone desde la génesis, debe constituir un carácter más o menos constante de dicho espacio de los objetos.

Ha llegado el momento de pasar a una comparación con

la historia de las ciencias y el objetivo de este párrafo es plantear ciertos problemas, cuyas respuestas serán dadas en la continuación de este artículo. Se encontrará al respecto un análisis de las diferentes posiciones adoptadas por la física, desde el siglo VII hasta nuestros días. Después de que Descartes soñase con una física (pero sin lograr constituirla) completamente reducida a la geometría (figuras y movimientos), tratando ésta sobre una «extensión» paralela al «pensamiento», es decir al álgebra (con fusión de ambas en la geometría análitica), Newton volvió a introducir el dinamismo, pero concibiendo al espacio con el tiempo como un continente y a la dinámica como un contenido, correspondiendo las relaciones entre ambos a un ajuste necesario pero sin interacción propiamente dicha.

Con la teoría de la relatividad, se economiza una fuerza de atracción a distancia y la gravitación se vuelve reductible a un sistema de movimientos inerciales, cuyas trayectorias siguen las curvaturas del espacio «riemaniano». A primera vista, existe allí una geometrización integral, es decir un retorno al ideal cartesiano, con reducción total de la dinámica al espacio-tiempo, y es así como la han interpretado diversos autores (Meyerson y a menudo H. Weyl, etc.). Pero el mismo Einstein admitía con mayor profundidad una asimilación realmente recíproca: si los cuerpos graves siguen las curvas del espacio, éstas son en realidad provocadas por las masas, de tal manera que hay aún una dinámica y un espacio o un espacio-tiempo, pero que mantienen entre sí relaciones de solidaridad desconocidas para Newton. En efecto, mientras que éste se atenía a relaciones de continente a contenido, éstos últimos se tornan en Einstein interdependientes (dicha interacción fue, entre otras, finamente analizada por Brunschvicg).

Para algunos contemporáneos, por el contrario (ver §§ 9 y 10), toda masa, por un lado, y todo proceso dinámico, por otra parte, se reducen a formas o a transformaciones geométricas, de tal suerte que ningún cuerpo ni acontecimiento físicos pueden seguir siendo situados *en* el espacio: son ellos mismos partes *del* espacio, la reducción soñada por Descartes parece así convertirse en una realidad efectiva.

Pero si comparamos esta fase actualmente última del pensamiento físico a lo que hemos mostrado en la génesis, dos grupos de problemas se plantean inevitablemente, y de la solución de éstos dependerán la interpretación epistemológica, idealista o realista, de dichos trabajos y finalmente de la supervivencia o la eliminación del dinamismo.

I) El primer grupo de interrogantes se refiere a la naturaleza de las operaciones utilizadas: ¿se trata de operaciones que pertenecen únicamente a la geometría del sujeto y le permiten construir modelos independientemente de una convergencia de detalle con una realidad que existe independientemente de nosotros, o bien se trata de operaciones «atribuidas a objetos», aun cuando dichos objetos no presenten ya ninguna relación con lo que nuestras percepciones (subjetivas, pero usuales) asocian comúnmente a ese término y no siguen siendo «objetivos» sino desde un punto de vista cognoscitivo ampliado e intelectualmente depurado?

a) Hay un sub-problema previo que consiste, después de recordar que las operaciones espaciales del sujeto son extemporáneas, en preguntarnos qué es lo que implica el carácter espacio-temporal de los espacios físicos utilizados por las teorías en cuestión. Sería insuficiente responder que, matemáticamente, el tiempo constituye simplemente cuarta dimensión: la cuestión es saber si la irreversibilidad propia a dicha dimensión, contrariamente a las otras tres, proporciona ya alguna indicación sobre el carácter «aplicado» o «atribuido» de las operaciones que lo utilizan. Ahora bien, decir que un electrón es expulsado por un fotón o que un fotón desaparece y transfiere su energía hv (o que es idéntico pero que entonces cambia de forma), ¿no sería, aun traduciendo dichos acontecimientos en puras operaciones geométricas, atribuir esas operaciones a los acontecimientos como tales? En efecto, si el sujeto-físico puede fácilmente, gracias a sus propias operaciones, remontarse a partir de ahí a los momentos anteriores en los cuales el electrón no era aún expulsado ni el fotón destruido, las operaciones utilizadas para interpretar el proceso no pueden por

el contrario ser invertidas, pues se trata de los propios acontecimientos en su reversibilidad (y el grupo PCT que imaginaba poder invertirlos no era precisamente atribuible a lo real). El carácter espacio-temporal y no exclusivamente espacial es, pues, un primer indicio del carácter «atribuido» de las operaciones en juego, puesto que el tiempo se refiere a acontecimientos y éstos implican una causalidad.

b) El segundo sub-problema consiste en preguntarnos lo que es epistemológicamente un objeto físico y si esa noción desaparece en caso de geometrización integral. Lo propio de un objeto de pensamiento, o lógico-matemático, es que las operaciones del sujeto pueden transformarlo a su manera: un rombo, por ejemplo, puede ser desplazado, sus dimensiones pueden ser cambiadas, puede ser estirado por transformaciones afines, proyectado, etc., o modificado en cualquier otra figura, con la única condición de que haya reglas coherentes de transformación. Estas son, pues, ilimitadas con tal que no sean contradictorias, y la cuestión no es hacerlas posibles, sino únicamente elegir, entre la infinidad de posibilidades, las más interesantes. Un objeto físico, por el contrario, obedece a leyes que no podrían ser cambiadas por el sujeto y éste no puede transformarlo sino dentro del cuadro establecido por esas leyes. Si tal fuera el caso, no es concibiéndolo como reductible a elementos espacio-temporales que se cambia su naturaleza de objeto, aunque tome alternativamente las formas de un paquete de ondas o de un corpúsculo y aun cuando éste sea concebido como una suetre de parte del espacio, apartando todo lo que nuestras percepciones tactilo-cinéticas y visuales prestan a los diferentes «cuerpos» que llamamos comúnmente «objetos» a nuestra escala.

c) En tercer lugar, una diferencia esencial opone las operaciones del sujeto a las que son atribuidas a los objetos así concebidos: mientras que las primeras no podrían ser contradichas por la experiencia, la validez de las segundas está subordinada a su control. Ahora bien, resulta claro que, si la especialización de los objetos de la física facilita la construcción de modelos deductivos, no podría dispensarlos de la confirmación

por los hechos experimentales en sí mismos. Existe, pues, una razón decisiva para considerar a las operaciones en juego como atribuidas a objetos.

En resumen, parece evidente que los seres espacio-temporales o cinemáticos a los cuales las nuevas teorías tratan de reducir no dejan por eso de ser concebidos como independientes del sujeto: eso significa que las operaciones que caracterizan sus estructuras les son atribuidas y no son subjetivas en el sentido del idealismo. Por otra parte, como esa atribución parece constituir el carácter más general de la explicación causal, el problema consiste entonces en tratar de establecer si dicha causalidad se reduce a una deducción cinemática o si comporta cierto dinamismo.

II) El segundo grupo de problemas que es preciso abordar deberá centrarse sobre el sentido de esa causalidad y sobre lo que ésta deja subsistir de dinamismo eventual. De una manera general, las analogías entre las composiciones operatorias y la causalidad consisten en que ambas comportan una síntesis de transformaciones, que dan cuenta de la novedad de los resultados, y de conservación, que asegura la relación entre los estados de partida y de llegada. La diferencia es, por el contrario, que las composiciones operatorias se deben a la actividad del sujeto, mientras que la causalidad es obra de los objetos concebidos como operadores. Ahora bien, en los modelos causales habituales en los que intervienen masas, acciones, fuerzas, y energías, el paralelismo entre la causalidad y las operaciones no es sino aproximado, en la medida en que precisamente ese dinamismo sigue siendo ajeno a las estructuras intemporales. En el caso de una geometrización íntegra del real isomorfismo entre los objetos y las operaciones del sujeto, éste tiende por el contrario a volverse completo: ¿debemos entonces concluir que hay una eliminación del dinamismo y de la causalidad en sí misma?

a) Una primera razón para dudar de esto es que, si la realidad física es concebida como sede de transformaciones espacio-temporales, subsiste una diferencia bastante fundamental

entre ellas y las transformaciones geométricas debidas al sujeto. En lo que se refiere a éstas, el poder está, acabamos de verlo, entre las manos del propio sujeto: afirmar que éste último no constituye más que una sede o un teatro y que sólo las operaciones están en juego y actúan no cambia nada en este asunto, pues cada operación es un acto y su conjunto (efectivo o virtual) es lo que constituye el sujeto. Cuando, por el contrario, una serie de reacciones se produce en el seno de un sistema, no es considerando cada elemento como una figura espacio-temporal, por lo tanto una «forma», que puede escaparse a la evidencia de una interacción entre esas «formas»: en efecto, si dichas «formas» no son las que construye el sujeto, es decir si ellas constituyen objetos en tanto que independientes de nosotros, resulta entonces claro que esas «formas» actúan unas sobre otras y ejercen por lo tanto un poder las unas sobre las otras. Ahora bien, mientras que el poder de las operaciones lógico-matemáticas sigue siendo intemporal, un poder espacio-temporal implica una sucesión en el tiempo y nada impide entonces asimilarlo a una relación causal, puesto que hay a la vez acción de un «objeto» sobre otro, en tanto dichos objetos, aunque geométricos, no dependen de nosotros, y encadenamiento de los antecedentes a los consecuentes, en tanto poseen también una cinemática.

b) De ser así, podemos suponer la existencia de una dinámica, por más depurada que sea ésta con respecto a las intuiciones habituales. En el lenguaje corriente, existen cuerpos y movimientos, y la dinámica interviene en ocasión de los cambios de los unos o de los otros. Geometrizando todo esto, los cuerpos se convierten en «formas» a las que se atribuyen los movimientos. Pero como cada una de esas formas conserva el poder de modificar otras así como sus movimientos, es entonces el «poder» quien desempeña un papel indispensable puesto que se confunde con la realidad misma de las transformaciones objetivas cuya existencia no podría ser negada. El espacio-tiempo no es entonces sino la coordinación de esas interacciones, en otras palabras, el «campo» caracterizado por la conexión entre esos acontecimientos (ver el final del § 1P).

c) En efecto, el gran interés de esa dinámica es que permanece inmanente a los operadores en juego. Ahora bien, como éstos son isomorfos (por ser geométricos) a las operaciones del sujeto, su dinamismo, aunque propiamente físico, puede escapar al análisis en la medida en que se olvida que las «formas» en juego son en realidad objetos, por ser autónomas y no organizadas por nosotros. Por el contrario, en la medida en que se presentan en modo explícito todas las presuposiciones físicas del sistema, esa geometrización, no solamente no tiene nada de idealista, sino que también aparece como una meta lógica de esa perpetua asimilación recíproca de las estructuras espaciales y dinámicas que se esboza a partir de los estadios elementales del desarrollo de la causalidad: dicha asimilación ha llegado incluso a ser tan completa que se puede hablar de un «geometrismo dinámico» a su respecto o, como lo dirá García, de una «geometrodinámica», y no únicamente de dos momentos sucesivos de la doctrina.

II. *LAS POSICIONES DE LOS FISICOS*

§ 4 / LAS CORRIENTES REDUCCIONISTAS DE PENSAMIENTO EN LA MECANICA

A partir del momento en que los físicos del siglo XVII llegan a la elaboración de la teoría de la mecánica —elaboración que encuentra en Newton su apogeo—, el problema de la interpretación de los conceptos de base sobre los que reposa la teoría queda planteado. La relación entre la geometría y la mecánica (es decir entre el espacio físico dotado de ciertas propiedades geométricas, por un lado, y la materia, del otro), es el nudo central de las diferencias entre las diversas interpretaciones.

Newton establece la doctrina que será luego la posición «oficial» de la física hasta el final del siglo XIX. El espacio existe independientemente de los objetos que lo ocupan y el teimpo existe independientemente de los objetos y procesos que duran. Es cierto que Newton geometrizó la física, en la medida en que las leyes que enunció y las operaciones que definió redujeron la aplicación de los problemas mecánicos a la aplicación de un método de cálculo. A. Koyré, en sus *Estudios newtonianos* (p. 29), considera que una de las características más importantes de la revolución newtoniana es la «geometrización del espacio, es decir la substitución del espacio-dimensión, homogéneo y abstracto, de la geometría de Euclides (sin embargo, considerado entonces como real), al conjunto continuo, concreto y diferenciado de los «lugares» de la física y de

la astronomía anteriores a Galileo». Y agrega: «De hecho esa caracterización es más o menos equivalente a la matematización (geometrización) de la naturaleza y por consiguiente a la matematización (geometrización) de la ciencia». Ahora bien, la geometrización no resuelve el problema, sino que lo presenta de una manera más aguda. El espacio tiene su propia geometría, que es la de Euclides. Las cosas que ocupan dicho espacio tienen propiedades que pueden expresarse por medio de números (por ejemplo: la masa). Dichos números son considerados como valores de los argumentos de funciones que están relacionadas entre sí por medio de principios (o leyes). El movimiento de los cuerpos puede, por consiguiente, ser «explicado» por el comportamiento de dichas funciones. Las propiedades geométricas de las funciones corresponden, pues, a las propiedades del movimiento Pero el mismo movimiento es determinado por las propiedades de los objetos.

Antes de los *Principia* de Newton, Descartes ya había intentado reducir la física a la mecánica, y ésta última a la geometría. La única propiedad de la materia que es considerada por Descartes es la extensión, que es una propiedad geométrica: «Los que pretenden distinguir la sustancia material de la extensión o de la cantidad, o bien no incluyen ninguna idea bajo el nombre de sustancia, o bien tienen la idea confusa de una sustancia inmaterial». Sin embargo, Descartes no acepta la existencia de un espacio físico independiente, es decir de un espacio vacío. Hay en los cartesianos una ambigüedad jamás resuelta: la extensión está relacionada con los cuerpos, pero se identifica también con el espacio. Por esa razón, Descartes rechaza el espacio absoluto pero, al mismo tiempo, trata al espacio como una noción fundamental en su ensayo de geometrización de la mecánica.

Huyghens y Leibniz van a «cuestionar» la posición de Newton con más profundidad y coherencia que los cartesianos. El espacio y el tiempo absolutos son rechazados. Las propiedades geométricas del espacio físico, así como las relaciones temporales, están dadas por los acontecimientos físicos.

A partir de ese período histórico se podría, en cierta me-

dida, hablar de un juego dialéctico que pasa por diferentes etapas, en las que la concepción que tienen los sabios sobre el movimiento oscila entre una subordinación de la geometría a las propiedades de la materia y un énfasis decidido en cuanto a los aspectos geométricos. Huyghens, Leibniz, Riemann, Clifford, Mach y Einstein están en el primer grupo. Descartes, d'Alembert, Lagranje, Hamilton, Hertz y algunos de los relativistas contemporáneos (como Meisner y Wheeler), en el segundo. Ninguna de estas dos listas es exhaustiva, y la distinción no es siempre clara; no tenemos la intención de hacer un análisis histórico profundo, sino más bien mostrar dos corrientes de pensamiento que constituyen, a nuestro entender, dos líneas de progreso que convergen. Sin embargo, la posición newtoniana subsistira, a pesar de la profunda revisión de sus fundamentos efectuada a partir del final del siglo XIX. Whitehead procurará, sin embargo, retornar al dualismo espacio estructurado-materia, dentro del contexto relativista. En su libro *The Principle of Relativity* declara con enfasis: «Es inherente a mi teoría el mantener la antigua división entre física y geometría. La física es la ciencia de las relaciones contingentes de la naturaleza y la geometría expresa *its uniform relatedness*»[1].

§ 5 / HUYGHENS Y LEIBNIZ CONTRA NEWTON

La mecánica de Newton está basada en una teoría del movimiento absoluto. En la Introducción a los *Principia,* Newton da definiciones de espacio y de tiempo absolutos. El espacio y el tiempo son caracterizados como entidades que existen independientemente de los objetos y que dan la medida de los acontecimientos espacio-temporales. El espacio newtoniano debe ser considerado como si estuviera en estado de reposo. Cuando introduce la aceleración en sus leyes de movimiento, es evidente que se trata de la aceleración respecto del espacio.

1. En inglés en el original.

Sin embargo, es importante destacar que la necesidad de introducir un espacio absoluto proviene, en Newton, de la dinámica y no de la cinemática. El estado de movimiento de un cuerpo se manifiesta por la ocurrencia de *fuerzas*. En la célebre polémica entre Leibniz y Clarke, este último —que habla evidentemente en representación de Newton— invoca la fuerza centrífuga como prueba última e irrefutable de un movimiento absoluto. Curiosamente, la Introducción a los *Principia* contiene una declaración explícita del autor según la cual «no ha considerado sus principios como físico, sino como simple geómetra».

A pesar de la enorme revolución que significó la concepción newtoniana de la mecánica, las bases mismas sobre las cuales fue edificada la nueva estructura fueron «cuestionadas» desde su origen. Desde el punto de vista que aquí nos interesa, los dos contestatarios más importantes —aparte de los cartesianos— fueron Huyghens y Leibniz.

Según Leibniz, tan sólo los objetos físicos y sus estados se pueden presuponer como «dados» y es sobre la base de ciertas relaciones entre ellos que construiremos luego el orden del tiempo y del espacio. La causalidad es la relación física que conduce al orden en el tiempo. Si dos estados físicos están en relación de causa a efecto, la causa *se define* como el estado anterior y el efecto como el estado posterior. «El tiempo es el orden de las cosas no simultáneas». Y «el espacio es el orden de las cosas coexistentes». Según Leibniz no hay «ninguna realidad absoluta fuera de las cosas».

Leibniz es un relativista en su concepción del movimiento. Sin embargo, admite que «en realidad cada cuerpo tiene cierto grado de movimiento o, si se prefiere, de fuerza», y de ahí concluye que «existe en la naturaleza algo que la geometría no puede determinar». Aparte de la extensión, que es puramente geométrica, hay algo que es más importante y que determina el movimiento: la fuerza. El movimiento adquiere así una significación metafísica: «Habiendo intentado profundizar los principios mismos de la mecánica, para explicar las leyes de la naturaleza, que la experiencia hacía conocer, me di cuenta de

que la simple consideración de una masa extensa no bastaba, y que era preciso emplear la noción de *fuerza* que es inteligible, aunque ésta corresponda a la metafísica». Sin embargo, Leibniz rechaza la concepción Newtoniana de la gravitación que le parece inexplicable. En su carta a Huyghens, en octubre de 1690, declara: «Después de haber considerado con atención el libro del señor Newton a quien he visto en Roma por primera vez, he admirado, y con razón, una cantidad de cosas interesantes que expone. No obstante no comprendo cómo concibe la gravedad, o atracción. Parecería que, según él, no es más que cierta virtud incorporal e inexplicable, mientras que Usted la explica en forma muy plausible por medio de las leyes de la mecánica».

Huyghens, en su respuesta, manifiesta su acuerdo a propósito de este juicio sobre Newton: «En lo que se refiere a la causa del reflujo que da el señor Newton, ésta no me satisface en absoluto, como tampoco las otras teorías que construye sobre su principio de atracción, que me parece absurdo, tal como lo he afirmado en la Adición al *Discurso de la gravedad*. Y siempre me ha sorprendido ver cómo ha podido tomarse el trabajo de hacer tantas investigaciones y cálculos difíciles, que no tienen más fundamento que ese mismo principio». Sin embargo, en otra parte de su correspondencia con Leibniz, aparece como un relativista más coherente que éste último: «No puedo convenir con usted en que un número de cuerpos que se encuentran mutuamente en movimiento relativo tengan cierto grado de movimiento o fuerza verdadera». Desgraciadamente, Huyghens no logró resolver el problema newtoniano de la rotación absoluta.

§ 6 / EL CARTESIANISMO DE D'ALEMBERT A HERTZ

6.1 / *El siglo* XVIII

Descartes quería basar toda la física en la mecánica que él se representaba como una pura geometría del movimiento.

Las ideas esenciales de Descartes están resumidas en los dos pasajes siguientes de sus obras:

Refiriéndose a la materia, afirma:

«Al examinar la naturaleza de esta materia, encuentro que no consiste en otra cosa que en el hecho de tener extensión en longitud, ancho y profundidad, de manera que todo lo que tiene tres dimensiones es una parte de esa materia; y no puede haber ningún espacio completamente vacío, es decir que no contenga ninguna materia, en razón de que no podríamos concebir tal espacio, sin concebir en él esas tres dimensiones, y, por consiguiente, materia» (*Obras,* t. V, págs. 51-52, Carta a Chaunt, 6 de junio de 1647).

En lo que se refiere al movimiento, lo define como:

«El transporte de una parte de la materia, o de un cuerpo, de la vecindad de los que lo tocan inmediatamente, y que nosotros consideramos en reposo, a la vecindad de algunos otros» (*Principia Philosophiae,* II, XXV, trad. francesa del Padre Picot, revisada por el mismo Descartes).

Es preciso destacar que la contribución efectiva de Descartes al desarrollo de la mecánica es prácticamente nula. En su famosa polémica con Leibniz se ve claramente que su idea sobre la cantidad de movimiento es errónea en la medida en que la concibe como si fuera un tamaño escalar y no vectorial. Por esa razón sus deducciones sobre el comportamiento de los sistemas mecánicos, en especial sus siete célebres reglas sobre el choque de cuerpos elásticos, son falsas. Sin embargo, el mismo Mach, tan implacable para juzgar sus errores, le reconoce un mérito singular.

«No se puede cuestionar a Descartes —dice Mach en *La mecánica* (pág. 272)— el mérito de haber sido *el primero* en buscar en la mecánica un punto de vista *más general* y más fecundo» (subrayado por Mach).

Se podría afirmar que todo el siglo XVIII, comenzando por Euler, los Bernoulli y Clairault, y sobre todo a través de d'Alem-

bert y Lagrange, tratará de buscar, de una u otra manera, ese punto de vista «más general» que permitiría evitar las dificultades propias de la formulación newtoniana.

D'Alembert ocupa una posición muy particular en esa lista en razón de su manera explícita de inclinarse hacia el análisis de los conceptos de base. En su *Tratado de dinámica,* no solamente «las leyes del equilibrio y del movimiento de los cuerpos se reducen al menor número posible, y se demuestran de una manera nueva» —según reza el sub-título de la obra—, sino que también se encuentra «el examen de otra cuestión muy importante, propuesta por la Academia real de Ciencias de Prusia, a saber, si las leyes de la estática y de la mecánica son una verdad necesaria o contingente».

En el «Discurso preliminar» de esa obra, d'Alembert afirma desde el comienzo que «la certeza de las matemáticas es una ventaja que dichas ciencias deben principalmente a la simplicidad de su objeto». Sin embargo, todas las partes de las matemáticas no tienen la misma simplicidad. En realidad, «no hay (...) más que las que tratan del cálculo de los tamaños y de las propiedades generales de la extensión, es decir el álgebra, la geometría y la mecánica, que pueden ser consideradas como marcadas por el sello de la evidencia». Ahora bien, las tres no se encuentran en el mismo plano. Existe una gradación que va del álgebra a la geometría, y de esta última a la mecánica, aumentando la complejidad de su objeto y, por consiguiente, disminuyendo su grado de evidencia. La razón debe buscarse —según d'Alembert— en el hecho de que «la obscuridad parece apoderarse de nuestras ideas a medida que examinamos en un objeto más propiedades sensibles».

Es precisamente desde ese punto de vista —es decir de la posición relativa de las ciencias en lo que se refiere a la «certidumbre» que le es propia— que d'Alembert juzga su obra: «Se ha aplicado felizmente el álgebra a la geometría, la geometría a la mecánica, y cada una de esas tres ciencias a todas las otras, de las que son la base y el fundamento».

Para d'Alembert, el movimiento y sus propiedades generales son el primer y principal objeto de la mecánica. Pero la

existencia del movimiento es «supuesta sin ninguna hipótesis particular». Los tres principios a partir de los cuales tratará de encontrar la solución de todos los problemas del movimiento son los principios de la fuerza de inercia, del movimiento compuesto y del equilibrio. Los tres son, para d'Alembert, verdades necesarias.

«Hemos demostrado —dice d'Alembert— que todas las leyes de la comunicación del movimiento entre los cuerpos se reducen a las leyes del equilibrio, y que las leyes del equilibrio se reducen a su vez a las del equilibrio de dos cuerpos iguales, animados en sentido contrario de velocidades virtuales iguales. En ese último caso, es evidente que los movimientos de dos cuerpos se destruirán recíprocamente y habrá aún necesariamente equilibrio cuando las masas se encuentren en razón inversa a las velocidades.»

El concepto de fuerza no cabe en la mecánica de d'Alembert sino como impulso producido por choques. La única definición de fuerza utilizada es de tipo cinético, dada por una relación de la forma $ft = v$.

El programa de d'Alembert es netamente de estilo cartesiano. Pero se aleja de los cartesianos —a quienes trata, por otra parte, con desdén— en dos puntos fundamentales. El primero se refiere a la identificación entre la materia y la extensión.

D'Alembert rechaza la idea de considerar la extensión y la materia como una misma cosa. Por el contrario, considera dos tipos de extensión:

«Una, que se considera como impenetraole, y que constituye lo que se llama propiamente los cuerpos; la otra, que, siendo considerada simplemente como extensión, sin examinar si es o no penetrable, será la distancia de un cuerpo a otro, y cuyas partes consideradas como fijas e inmóviles pueden servir para observar el reposo o el movimiento de los cuerpos. Por consiguiente siempre podremos concebir un espacio indefinido como el lugar de los cuerpos, ya sea real, ya supuesto, y considerar el movimiento como el transporte del móvil de un lugar a otro.»

Aunque las ideas expresadas aquí son newtonianas, el programa seguido para traducir en ecuaciones las leyes del movimiento es, como ya lo hemos indicado, claramente cartesiano.

La segunda divergencia respecto de los cartesianos es el establecimiento de una diferencia fundamental entre la geometría y la mecánica.

«La consideración del movimiento entra algunas veces en las investigaciones de la geometría pura.» Pero, «la geometría no considera en el movimiento más que el espacio recorrido, mientras que en la mecánica se considera además el tiempo que el móvil emplea para recorrer dicho espacio».

Esa consideración del papel del tiempo en la mecánica no será íntegramente comprendida —como es sabido— hasta la teoría de la relatividad.

La línea de pensamiento de d'Alembert será continuada por Lagrange en su *Mecánica analítica,* considerada por los historiadores de la ciencia como «la obra que resume y corona todo el esfuerzo del siglo XVIII hacia la elaboración de una mecánica racionalmente organizada». (R. Dugas, Historia de la mecánica).

Lagrange considera que el principio de la palanca y el principio de la composición de fuerzas son suficientes para servir de fundamento a la estática, pero se opone a quienes reducen a este último «a no ser más que un resultado de construcciones geométrica o de análisis».

«Hay que reconocer —dice— que al separar de esa manera el principio de la composición de fuerzas del de la composición de movimientos, se le hace perder sus principales ventajas, la evidencia y la simplicidad.»

Sin embargo, desarrollará su estática sobre la base de un solo principio más general, el principio de las velocidades virtuales, del que afirma:

«Ya sea que se considere el principio de las velocidades virtuales como una propiedad general del equilibrio, como lo hizo Galileo, o bien siguiendo a Descartes y a Wallis se lo tome por la verdadera causa del equilibrio, es preciso reconocer que posee toda la simplicidad que se puede desear en un principio fundamental.»

Parecería que Lagrange continuara, en cierta medida, la línea de pensamiento de Leibniz (es la opinión de Duhem, por ejemplo), al situar el concepto de fuerza, como noción fundamental, en el punto de partida de su construcción de la mecánica. Pero esa semejanza, que no es más que una apariencia, como lo vamos a ver, se apoya en el hecho de que la «mecánica analítica» comienza con la definición de «*fuerza* o *potencia*» como «la causa, cualquiera, que imprime o tiende a imprimir movimiento al cuerpo al que se la supone aplicada». Hertz hará notar más tarde que Lagrange «debe haber ciertamente percibido la dificultad lógica de tal definición». Sin embargo, Lagrange no efectúa ninguna elaboración ulterior de ese concepto de fuerza; por el contrario, continúa el procedimiento adoptado por d'Alembert, expresando la fuerza por la velocidad dividida por el tiempo.

Lagrange, contrariamente a d'Alembert, no hace ningún análisis de los conceptos fundamentales. Su finalidad consiste en «reducir la mecánica a operaciones puramente analíticas» y lo consigue con una parsimonia y un rigor extraordinarios. Al hacerlo, manifiesta —indirectamente— un cartesianismo implícito.

La noción de fuerza aparece en las ecuaciones de Lagrange como sumergida en un concepto ampliado: el de fuerza generalizada. De esa manera, pierde su carácter de concepto fundamental, irreductible a otros conceptos. La estructura resultante se aleja por lo tanto de la tradición «leibniziana».

6.2 / *Hertz y el desvanecimiento de la fuerza*

En su Introducción a su obra *Los principios de la mecánica,* Hertz resume claramente los fundamentos de lo que llama *the customary representation of mechanics.* Los principales constructores de dicha «representación» en su desarrollo histórico son, según Hertz, Arquímedes, Galileo, Newton y Lagrange. Las ideas de base son las de espacio, tiempo, fuerza y masa. La idea de fuerza es introducida como causa del movimiento. existente antes que el propio movimiento e independientemente de éste. Las interconexiones se explican de la siguiente manera:

«El espacio y la fuerza aparecen primeramente *by themselves*[1] y sus relaciones son consideradas en la estática. La cinemática, o ciencia del movimiento puro, se ve reducida a efectuar la conexión entre las dos ideas de espacio y de tiempo. La concepción de Galileo a propósito de la inercia proporciona una conexión entre el espacio, el tiempo y la masa, y nada más. Y es tan sólo a partir de las leyes del movimiento de Newton que las cuatro ideas fundamentales pudieron ser conectadas entre sí. Dichas leyes contienen el germen de futuros desarrollos, pero no proporcionan ninguna expresión general para expresar la influencia de conexiones espaciales rígidas. El principio de d'Alembert aplica aquí los resultados generales de la estática al caso del movimiento, clausurando así la serie de enunciados fundamentales independientes que no pueden ser deducidos los unos de los otros. De allí en adelante todo es inferencia deductiva.»

Hertz somete a un examen crítico profundo esta manera de fundar la mecánica, y trata de reconstruirla sobre bases más claras, reduciendo al mínimo los conceptos fundamentales. Sus *Principles of Mechanics* —última obra escrita poco antes de su muerte, cuando sólo tenía 27 años —provocan la admiración —sino ya la aceptación total— de críticos tan severos como Mach y Boltzman.

1. En inglés en el original.

«En la admirable construcción ideal de la mecánica que desarrolló Hertz —dice Mach (*La mecánica,* pág. 255)— los elementos físicos se encuentran tan reunidos y reducidos a una expresión tan simple que son *en apariencia* apenas perceptibles. Descartes, si viviera actualmente, reconocería sin duda su propio ideal en la mecánica de Hertz, más aún que en la de Lagrange...»

Por su parte, Boltzmann afirmará que:

«Los principios de la mecánica establecidos por Hertz son de una extraordinaria simplicidad y belleza. Naturalmente, no están del todo exentos de arbitrariedad, pero se diría que lo arbitrario se encuentra en ellos reducido al mínimo.»

Teniendo en cuenta las características de la reconstrucción de la mecánica realizada por Hertz, los dos juicios que acabamos de citar adquieren una gran importancia, en la medida en que muestran claramente hasta qué punto cierto grado de arbitrariedad era admitido como inevitable por los físicos que trabajaron con mayor intensidad en los problemas de los fundamentos de la mecánica, en el período de transición entre los siglos XIX y XX.

En su reconstrucción de la mecánica, Hertz utiliza únicamente los tres conceptos fundamentales, e *independientes,* de tiempo, espacio y masa, considerados como objetos de experiencia. Busca, en primer lugar, las conexiones entre esas ideas por pares. Las relaciones entre el espacio y el tiempo constituyen la cinemática. No hay relaciones que conecten únicamente la masa con el tiempo. Por el contrario, entre la masa y el espacio hay relaciones y éstas son importantes. Ciertas posiciones y ciertos cambios de posición son prescritos como posibles para las masas, con una total independencia del tiempo, mientras que todos los otros se consideran como imposibles. Dichas conexiones no son aplicables sino a las posiciones relativas de las masas entre sí. Deben ser respetadas lo mismo que ciertas condiciones de continuidad. Hertz construye, sobre esa base, la mecánica, efectuando la conexión entre las tres leyes fundamentales en una misma ley: «Todo movi-

miento natural de un sistema material independiente consiste en que el sistema continúa con una velocidad uniforme el camino más rectilíneo posible». Como lo indica el mismo Hertz, esta ley condensa en un único y mismo principio el principio de la inercia y el de la mínima compulsión de Gauss. Lo expresa de la siguiente manera: «Si las conexiones del sistema pudieran ser momentáneamente destruidas, sus masas se dispersarían con un movimiento en línea recta y de velocidad constante; ahora bien, como eso es imposible, éstas tratan de aproximarse tanto como sea posible a un tal movimiento». Es a partir de ese principio, y apoyándose especialmente en los medios que le ofrece la mecánica analítica de Lagrange, que Hertz reconstruye la mecánica.

Ese intento de reconstruir toda la mecánica sobre una sola ley de mínima compulsión tiene dos consecuencias importantes. En primer lugar, el concepto de fuerza como idea fundamental desaparece. Y es reemplazado por el de relación entre las masas. En segundo término, Hertz se ve forzado a una suposición arriesgada. «En lo que se refiere a las masas, dejamos establecido que, además de las masas susceptibles de ser reconocidas por los sentidos, otras masas ocultas pueden ser introducidas por hipótesis». El reemplazo de las fuerzas por «relaciones» obliga a suponer que, cuando éstas no son visibles, existen masas ocultas animadas por movimientos ocultos. Esta idea un tanto sorprendente no es, sin embargo, menos aceptable o menos inquietante que las acciones a distancia admitidas en la mecánica newtoniana. Si las ideas de Hertz no han encontrado adeptos y continuadores no es por el hecho de haber sido rechazadas por razones teóricas. «El modelo construido por Hertz independientemente de la experiencia —señala Boltzmann— posee una perfección y una evidencia indiscutibles; y no contiene sino muy pocos elementos arbitrarios». Pero esa mecánica es difícil de concebir en sus aplicaciones prácticas. El juicio definitivo de Boltzmann es el siguiente:

«La mecánica de Hertz parecería más bien un programa para

el futuro lejano. Cuando se llegue a explicar todos los procesos de la naturaleza por medio de movimientos ocultos en el sentido que les da Hertz, y de una manera que no sea demasiado artificial, la vieja mecánica será reemplazada por la de Hertz. Hasta ese momento, la mecánica clásica parece ser la única capaz de explicar claramente los fenómenos, sin tratar de buscar objetos que, no solamente están ocultos, sino que ni siquiera se sospecha cómo conviene imaginarlos.»

De tal manera, la obra de Hertz permanece como dotada de un valor solamente académico, pero puede ser considerada como el resultado del tipo de especulación característica del siglo XVII. Hertz cierra así, a fines del siglo XIX, el ciclo que comienza con Galileo, Descartes, Newton y Huyghens. Después de un siglo y medio de esfuerzos la construcción sigue inconclusa. El siglo XX encontrará mejores soluciones, pero no sin haber previamente penetrado, de una manera más profunda en los fundamentos, y habiendo sometido a crítica no solamente las ideas de masa y de fuerza, sino también, y sobre todo, los conceptos de espacio y de tiempo. Esa obra será la de Einstein, que volverá a tomar, probablemente sin saberlo, la línea de pensamiento que comienza con Leibniz.

§ 7 / EL RENACIMIENTO DE LAS IDEAS DE LEIBNIZ

En su famosa conferencia de 1854 —publicación póstuma hecha por Dedekind, en 1867—, Riemann introduce una idea revolucionaria sobre las relaciones entre la geometría y la física. Riemann generaliza la teoría desarrollada por Gauss a propósito del concepto de curvatura de una superficie, aplicándola al caso de las variedades de un número arbitrario de dimensiones. Llega así a concebir la idea —que más tarde retomará Einstein— de un espacio ilimitado pero finito:

«Cuando se extiende las construcciones del espacio a lo inconmensurablemente grande, es preciso distinguir entre lo ilimitado o

lo infinito: el primero pertenece a las relaciones de extensión, el segundo a las relaciones métricas. La idea de que el espacio sea una variedad ilimitada de tres dimensiones es una hipótesis que se aplica a todas nuestras concepciones del mundo exterior, que nos sirve para completar a cada instante el campo de nuestras percepciones efectivas y a construir los lugares posibles de un objeto buscado, y que se encuentra constantemente comprobada en todas esas aplicaciones. La propiedad del espacio de ser ilimitado posee pues una mayor certidumbre empírica que cualquier otro dato externo de la experiencia. Pero la infinitud del espacio no es de ninguna manera su consecuencia; por el contrario, si se supone que los cuerpos son independientes del lugar, y se atribuye así al espacio una medida de curvatura constante, el espacio sería necesariamente finito a partir del momento en que esa medida de curvatura tuviera un valor positivo, por pequeño que éste fuera. Al prolongar siguiendo líneas de más corta distancia las direcciones iniciales situadas en un elemento superficial, se obtendría una superficie ilimitada de medida de curvatura constante, es decir una superficie que, en una variedad plana de tres dimensiones, tomaría la forma de una superficie esférica, y sería por consiguiente finita.»

La noción central que se utiliza aquí es la de la subordinación de las propiedades del espacio a las propiedades de la materia. El párrafo más importante de la conferencia de Riemann establece que:

«La cuestión de la validez de las hipótesis de la geometría en lo infinitamente pequeño está ligada a la cuestión del principio íntimo de las relaciones métricas en el espacio. En esta última cuestión, que bien se puede aún considerar como perteneciente a la doctrina del espacio, se encuentra la aplicación de la observación precedente, que, en una variedad discreta, el principio de las relaciones métricas ya está contenido en el concepto de dicha variedad, mientras que, en una variedad continua, ese principio debe provenir de fuera. Por consiguiente, es preciso, o bien que la realidad sobre la cual se funda el espacio forme una variedad discreta, o que el fundamento de las relaciones métricas sea buscado fuera de éste, en las fuerzas de unión que actúan en él.»

La interpretación más clara de las ideas de Riemman ha

sido la de H. Weyl en su libro *Tiempo, espacio, materia* (pág. 84):

«Riemann niega allí que la métrica del espacio sea independiente de los fenómenos físicos que se desarrollan en su seno, y que ésta sea fijada desde un principio, de tal manera que entonces lo real entra en el espacio como en una casa alquilada; afirma más bien, en contradicción con la creencia habitual, que el espacio en sí mismo no es otra cosa que una multiplicidad tridimensional amorfa y que es el contenido material que le llena lo que le da su forma y determina sus relaciones de medida.»

Einstein irá aún más lejos que Riemann. Según su *Teoría general de la relatividad,* un espacio vacío, es decir un espacio sin campo, no existe. Si el campo de gravitación es eliminado no queda «absolutamente *nada,* ni siquiera un espacio topológico», pues las funciones que describen al campo de gravitación «no sólo describen al campo, sino también, simultáneamente, las propiedades de estructura topológicas y métricas de la multiplicidad» [1].

La eliminación de la noción de espacio del fundamento de la mecánica ya había sido propuesta por Mach hacia fines del siglo XIX. Mach criticó la concepción de Descartes según la cual toda la física estaba basada en una mecánica concebida como una pura geometría del movimiento. Descartes no tenía una idea clara acerca de la masa y, por consiguiente, no había considerado el hecho de que «una mecánica no es posible sino cuando las situaciones de los cuerpos en su *dependencia* recíproca son determinadas por una relación de fuerzas en función del tiempo» (Mach, *La mecánica,* pág. 272).

Según Mach, el espacio completamente vacío carece de estructura. Las propiedades geométricas del espacio son determinadas exclusivamente por la materia que lo ocupa. En cierta medida, se puede decir que hay allí una nueva formulación de la posición de Leibniz y de Riemann. Pero Mach continúa

1. A. Einstein, *La relatividad y el problema del espacio,* París, Gauthier-Villars, 1956.

aún un poco más lejos el análisis y vuelve a cuestionar el concepto de inercia tal como aparece en las leyes de Newton. «Decir que un cuerpo conserva su velocidad y su dirección en el *espacio* es simplemente una manera abreviada de referirse a todo el universo.» El movimiento de un cuerpo K no es *referido al espacio.* En lugar de ello se efectúa el estudio directo de las relaciones de K con todos los cuerpos del universo. Así, «en lugar de decir que la velocidad de una masa M del espacio sigue siendo constante en tamaño y en dirección, se puede decir también que la aceleración media de dicha masa M respecto de las masas a, m', m'', ..., situadas a las distancias r, r', r'', ..., es nula, o bien que esta última expresión es equivalente a la primera si se considera un número suficiente de masas suficientemente grandes y alejadas. La influencia mutua de las pequeñas masas más cercanas, que son en apariencia independientes entre sí, desaparece por sí misma» (*ibíd.,* pág. 227).

La idea central de Mach es que *todas* las masas están en relación mutua. Aún en el caso más simple, en el que aparentemente no tratamos sino de la acción mutua entre dos masas, es imposible dejar de lado al resto del universo. Mach responde así a la última pregunta de Clarke, que la muerte de Leibniz dejó sin respuesta. No hay rotación *absoluta.* En la experiencia del cubo lleno de agua y animado de un movimiento de rotación, las fuerzas centrífugas aparentes «son despertadas» por el movimiento relativo del agua «con respecto a la masa de la tierra y a los otros cuerpos celestes». «Según mi entender —dijo Mach—, no existe en resumidas cuentas más que un movimiento relativo y no percibo a ese respecto *ninguna* distinción entre la rotación y la traslación. Una rotación respecto de las *estrellas fijas* hace nacer en un cuerpo fuerzas de alejamiento del eje; si la rotación no es relativa a las estrellas fijas, dichas fuerzas de alejamiento no existen. No me opongo a que se dé a la primera rotación el calificativo de *absoluta* siempre y cuando no se olvide que no es otra cosa que una rotación *relativa* respecto de *las estrellas fijas.* ¿Podemos acaso fijar el recipiente de agua de Newton,

hacer luego girar el cielo de las estrellas fijas, y *probar entonces* la ausencia de dichas fuerzas de alejamiento? Esa experiencia es irrealizable, se trata de una idea desprovista de sentido, pues *los dos* casos son imposibles de discernir uno del otro en la percepción sensible. Considero pues esos *dos casos* como formando uno solo y pienso que la percepción de Newton es ilusoria» (*ibíd.*, pág. 321).

Una consecuencia de este punto de vista es que no existe una diferencia esencial entre la gravitación y la inercia. Las mismas fuerzas mecánicas son interpretadas como gravitación o como inercia según el sistema de coordenadas que se elija como referencia. En consecuencia, y contrariamente a lo que sostenía Newton, no hay ningún tipo de fuerza inercial que pueda ser considerada como indicación de un movimiento absoluto.

Mach aparece así como el primer físico relativista (a pesar suyo, puesto que se declaró antirelativista en su obra póstuma: *Los principios de la óptica física*). Einstein se refiere a menudo a lo que él llama el «principio de Mach», es decir a la dependencia de la inercia (traslacional y rotacional), con respecto a la distribución en gran escala y al movimiento de la materia.

§ 8 / LA CONCEPCION DE LA GEOMETRIA EN LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD

8.1. La axiomatización de la geometría de Euclides y el desarrollo de las geometrías no euclidianas constituyeron jalones decisivos en el proceso de clarificación progresiva del viejo problema de las relaciones entre la geometría y el mundo físico. Probablemente, la mejor síntesis del problema fue hecha por el mismo Einstein. «¿Cómo es posible que la matemática, que es el producto del pensamiento humano e independiente de toda experiencia, pueda adaptarse de una manera tan admirable a los objetos de la realidad?», se pregunta Einstein. Y prosigue: «Opino que, a esta pregunta, se debe

responder de la siguiente manera: En cuanto las proposiciones de las matemáticas se refieren a la realidad, no son seguras, y en tanto son seguras, no se refieren a la realidad» (Eeinstein, *La geometría y la experiencia*).

Esta célebre afirmación de Einstein expresa de una manera clara la distinción entre geometría matemática y geometría física. Esta última, es decir la geometría del espacio físico, es la que continúa siendo un problema. La teoría de la relatividad constituye, a ese respecto, la más profunda revisión de sus fundamentos en toda la historia que aquí consideramos.

Dicha revisión se efectúa en dos etapas que corresponden, sucesivamente, al campo de la relatividad restringida y al de la relatividad general.

8.2. En la «Introducción» a la memoria en la que expone por primera vez su teoría de la relatividad restringida (*De la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*), Einstein parte de «la conjetura de que, no solamente en la mecánica sino también en la electrodinámica, ninguna propiedad de los fenómenos corresponde al movimiento absoluto. Para todos los sistemas de coordenadas en los cuales las ecuaciones mecánicas siguen siendo válidas, las leyes electrodinámicas y ópticas conservan igualmente su valor».

Einstein introduce esa conjetura —que elevará «al rango de una hipótesis»— a partir de las asimetrías de la electrodinámica de Maxwell, aplicada a los cuerpos en movimiento, y de los resultados negativos de la célebre experiencia de Michelson-Morley para demostrar el movimiento de la tierra respecto del «medio donde se propaga la luz».

Al aplicar así a los fenómenos electromagnéticos el concepto de relatividad que es válido en la física newtoniana para los fenómenos mecánicos, Einstein introduce, en primer lugar, una revolución metodológica: traduce los resultados experimentales en un principio fundamental, y, a partir de ese punto, vuelve a formular los fundamentos conceptuales sobre los cuales estaba construida la física clásica. La misma línea de pen-

samiento le lleva a otra suposición (que no es, en realidad, sino un corolario de la anterior, cuando ésta es aplicada a las ecuaciones de Maxwell): «La luz se propaga siempre en el vacío con cierta velocidad e independiente del estado de movimiento de la fuente luminosa». Sobre esa base, Einstein construye una electrodinámica de los cuerpos en movimiento «simple y exenta de contradicciones».

El último párrafo de la introducción de la memoria que ya hemos citado presenta un interés muy especial para el tema que tratamos aquí:

«La teoría que vamos a exponer se basa, como toda electrodinámica, en la cinemática del cuerpo rígido, pues los enunciados de toda teoría consideran las relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), de los relojes y de los procesos electromagnéticos. El olvido de esta circunstancia origina las dificultades contra las que lucha actualmente la electrodinámica de los cuerpos.»

Y es precisamente el análisis de la función cumplida por los cuerpos rígidos y los relojes lo que va a constituir el principio de la gran revolución provocada por Einstein en los conceptos fundamentales de la física.

8.3. El objeto de nuestro trabajo no es desarrollar los principios de la teoría relativista ni establecer las diferencias precisas que existen entre la teoría de la relatividad restringida y la teoría de la relatividad general. Nos limitaremos a recordar brevemente algunos hechos fundamentales.

En la relatividad restringida, el espacio y el tiempo dejan de tener papeles completamente independientes; y son reemplazados por el concepto de una multiplicidad de cuatro dimensiones. Un punto en esa multiplicidad representa un acontecimiento determinado por tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal. Dos puntos-acontecimientos en un sistema de referencia de inercia referido a coordenadas cartesianas que determinan así un intervalo que puede expresarse por medio de la relación de Minkowski:

responder de la siguiente manera: En cuanto las proposiciones de las matemáticas se refieren a la realidad, no son seguras, y en tanto son seguras, no se refieren a la realidad» (Eeinstein, *La geometría y la experiencia*).

Esta célebre afirmación de Einstein expresa de una manera clara la distinción entre geometría matemática y geometría física. Esta última, es decir la geometría del espacio físico, es la que continúa siendo un problema. La teoría de la relatividad constituye, a ese respecto, la más profunda revisión de sus fundamentos en toda la historia que aquí consideramos.

Dicha revisión se efectúa en dos etapas que corresponden, sucesivamente, al campo de la relatividad restringida y al de la relatividad general.

8.2. En la «Introducción» a la memoria en la que expone por primera vez su teoría de la relatividad restringida (*De la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*), Einstein parte de «la conjetura de que, no solamente en la mecánica sino también en la electrodinámica, ninguna propiedad de los fenómenos corresponde al movimiento absoluto. Para todos los sistemas de coordenadas en los cuales las ecuaciones mecánicas siguen siendo válidas, las leyes electrodinámicas y ópticas conservan igualmente su valor».

Einstein introduce esa conjetura —que elevará «al rango de una hipótesis»— a partir de las asimetrías de la electrodinámica de Maxwell, aplicada a los cuerpos en movimiento, y de los resultados negativos de la célebre experiencia de Michelson-Morley para demostrar el movimiento de la tierra respecto del «medio donde se propaga la luz».

Al aplicar así a los fenómenos electromagnéticos el concepto de relatividad que es válido en la física newtoniana para los fenómenos mecánicos, Einstein introduce, en primer lugar, una revolución metodológica: traduce los resultados experimentales en un principio fundamental, y, a partir de ese punto, vuelve a formular los fundamentos conceptuales sobre los cuales estaba construida la física clásica. La misma línea de pen-

samiento le lleva a otra suposición (que no es, en realidad, sino un corolario de la anterior, cuando ésta es aplicada a las ecuaciones de Maxwell): «La luz se propaga siempre en el vacío con cierta velocidad e independiente del estado de movimiento de la fuente luminosa». Sobre esa base, Einstein construye una electrodinámica de los cuerpos en movimiento «simple y exenta de contradicciones».

El último párrafo de la introducción de la memoria que ya hemos citado presenta un interés muy especial para el tema que tratamos aquí:

«La teoría que vamos a exponer se basa, como toda electrodinámica, en la cinemática del cuerpo rígido, pues los enunciados de toda teoría consideran las relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), de los relojes y de los procesos electromagnéticos. El olvido de esta circunstancia origina las dificultades contra las que lucha actualmente la electrodinámica de los cuerpos.»

Y es precisamente el análisis de la función cumplida por los cuerpos rígidos y los relojes lo que va a constituir el principio de la gran revolución provocada por Einstein en los conceptos fundamentales de la física.

8.3. El objeto de nuestro trabajo no es desarrollar los principios de la teoría relativista ni establecer las diferencias precisas que existen entre la teoría de la relatividad restringida y la teoría de la relatividad general. Nos limitaremos a recordar brevemente algunos hechos fundamentales.

En la relatividad restringida, el espacio y el tiempo dejan de tener papeles completamente independientes; y son reemplazados por el concepto de una multiplicidad de cuatro dimensiones. Un punto en esa multiplicidad representa un acontecimiento determinado por tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal. Dos puntos-acontecimientos en un sistema de referencia de inercia referido a coordenadas cartesianas que determinan así un intervalo que puede expresarse por medio de la relación de Minkowski:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (1)$$

(c = velocidad de la luz)

Ese hecho ha sido expresado por Minkowski en una frase célebre:

«El espacio en sí y el tiempo en sí deben, desde ahora, entrar completamente en la sombra, y sólo una suerte de asociación entre esos dos conceptos conserva una individualidad propia.»

La afirmación no es, sin embargo, enteramente correcta. El hecho de considerar el tiempo como una cuarta coordenada que se agrega a las tres dimensiones espaciales a fin de determinar un espacio-tiempo cuatridimensional, no agrega al tiempo ningún carácter particular. En realidad, ese procedimiento es perfectamente válido dentro de la mecánica clásica prerrelativista.

La relación entre espacio y tiempo introducida por la relatividad tiene un significado más profundo que la relación (1). Y puede resumirse en los siguientes puntos:

a) Hay dos procedimientos fundamentales para medir intervalos de tiempo: contar acontecimientos periódicos y medir distancias (espaciales) en el caso de procesos no periódicos. En ambos casos se asocia a cierto tipo de proceso un intervalo de tiempo, lo que da lugar a ciertas suposiciones a propósito de los mecanismos físicos que rigen dichos procesos.

b) No hay ninguna posibilidad de determinar empíricamente la igualdad entre dos intervalos *sucesivos* de tiempo. Las leyes que conducen a establecer el isocronismo de las oscilaciones de un péndulo, por ejemplo, contienen implícitamente la suposición de la igualdad de los intervalos sucesivos de tiempo en cierto sistema de base. Toda «demostración» o «verificación» es, pues, circular.

c) La comparación de los instantes de tiempo durante los cuales tienen lugar dos acontecimientos distantes entre sí en el espacio —en particular la definición de la simultaneidad de dos acontecimientos distantes— se basa siempre en el en-

vío de señales de un punto a otro punto del espacio. Esto supone previamente un conocimiento de la distancia y de la velocidad de la señal. La identificación de la luz en calidad de señal que se propaga más rápidamente que cualquier otra y que posee, además, una velocidad finita, obliga a introducir definiciones con cierto grado de arbitrariedad con respecto a las velocidad (por ejemplo, la suposición que la velocidad de propagación en dos direcciones opuestas es la misma). Dichas definiciones comportan, a su vez, una definición de simultaneidad igualmente arbitraria. La definición de la simultaneidad está así desprovista de significación absoluta.

d) La relación íntima que existe entre los conceptos de espacio y tiempo resulta evidente cuando se consideran las dificultades que se presentan cuando se trata de pasar de la definición de la longitud de un segmento de recta «en reposo» a la definición de la longitud de un segmento que se desplaza a una velocidad dada. De una u otra manera se llega a una definición de este tipo: «La longitud de un segmento de recta en movimiento es la distancia entre las posiciones *simultáneas* de sus puntos extremos.» Las medidas espaciales dependen por lo tanto de la definición de simultaneidad.

Esta dependencia recíproca entre los conceptos fundamentales utilizados para definir las relaciones espaciales, por un lado, y las relaciones temporales, por el otro, cuando se trata de acontecimientos distantes entre sí, es lo que confiere su verdadero significado a la proposición de Minkowski que ya hemos citado. Sin embargo, para cada observador, las coordenadas espaciales y la coordenada temporal conservan un significado físico inmediato. En el universo de Minkowski existen aún intervalos del género-espacio e intervalos del género-tiempo.

8.4. El principio de relatividad, según el cual todos los sistemas inerciales son equivalentes tanto en lo que se refiere a los fenómenos mecánicos como a los fenómenos electromagnéticos, da a los sistemas de referencia inerciales una posición privilegiada. Las leyes físicas adquieren su más simple

formulación cuando los movimientos son referidos a esos sistemas. Constituyen asimismo patrones para determinar las aceleraciones.

Mach, en su crítica de la idea newtoniana de una aceleración absoluta, ha llegado —como lo hemos indicado en la sección 4— a identificar la inercia con los efectos de la gravitación. Pero esta última sigue siendo tan incomprensible como lo era en la formulación de Newton, en la medida en que Mach debe aún postular la acción a distancia. Einstein conservará la idea central de la formulación de Mach —a la que llamará «principio de Mach»— pero puede decirse que va a invertir los términos de la relación: la gravitación será explicada, en cierta medida, por la inercia, y no inversamente. Esta será la misión de la teoría de la relatividad general. El punto de partida de Einstein es el *Principio de equivalencia* que introduce con su famoso ejemplo del ascensor cortado de los lazos que lo sostienen y cae libremente hacia la tierra. Las leyes de Newton, aplicadas a experiencias en el interior del ascensor —considerado como un laboratorio—, demuestran que todos los fenómenos mecánicos se producen como si el ascensor fuera un sistema inercial. Einstein va a postular la validez de esa equivalencia para todos los fenómenos físicos. Un laboratorio en «caída libre» hacia una masa con un campo de gravitación potente actúa por consiguiente de la misma manera que un laboratorio alejado de la atracción de cualquier masa e inmóvil respecto de las «estrellas fijas».

Según Newton, la fuerza de gravitación puede medirse en términos de coordenadas de un sistema inercial. Los efectos de la gravitación se agregan, pues, al sistema inercial.

De acuerdo con el principio de equivalencia, un campo gravitacional puede ser transformado de tal manera que desaparezca como tal y permanezca únicamente como efecto de la inercia. Un acontecimiento cualquiera puede ser así asociado a un sistema inercial de coordenadas. Sin embargo, tal sistema no tiene más que una validez local. Es decir que, a proximidad del acontecimiento en cuestión, un intervalo ds

está determinado por la expresión de Minkowski (1). Pero dicho sistema inercial no puede extenderse indefinidamente en el espacio. En la teoría de Einstein no hay otros sistemas inerciales que no sean esos sistemas locales. No hay un sistema privilegiado respecto del cual se pueda determinar el campo de gravitación. El campo es diferente para sistemas de coordenadas en estado de movimiento. Ahora bien, el relativismo no es total. Hay un invariante que expresa el estado del universo en lo que se refiere a la acción recíproca de sus masas. Dicha invariante aparece en razón de que cada sistema de coordenadas, conjuntamente con su campo de gravitación, es decir el campo expresado en los términos de dichas coordenadas, es equivalente a cualquier otro sistema de coordenadas con su campo gravitacional correspondiente.

Desde el punto de vista matemático, esto significa que el campo de gravitación puede ser representado por un tensor cuyas componentes cambian con el sistema de coordenadas. Pero ese mismo tensor es una invariante. Dicho tensor coincide con el tensor que define la métrica del espacio [1].

1. Para aquellos que no están familiarizados con el cálculo tensorial, conviene presentar algunas definiciones.

Un espacio en el sentido de Riemann es una multiplicidad en la que la «distancia» o «intervalo» entre dos puntos vecinos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, ..., x_n + dx_n)$ es definida por la expresión:

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \qquad (2)$$

Los g_{ik} son funciones de las coordenadas. La expresión que define el valor del intervalo ds se llama la métrica del espacio. Dicha expresión constituye una generalización del teorema de Pitágoras. Teniendo en cuenta que ds es un escalar, su valor debe ser independiente del sistema de coordenadas, es decir:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k = g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

A partir de esto se puede fácilmente demostrar que los g_{ik} son las componentes de un tensor covariante de rango dos.

Las consideraciones formuladas anteriormente a propósito de la relación entre el campo gravitacional y los sistemas inerciales, en la teoría de la relatividad, pueden extraerse de la siguiente manera. En un sistema de coordenadas inercial (a la manera de Galileo), la métrica está dada por la relación de Minkowski (1):

Las g_{ik} combinan pues los efectos de gravitación y de inercia. La acción a distancia desaparece. El movimiento de un planeta no está determinado por la fuerza de atracción, ejercida a través del espacio vacío, por el Sol y los otros planetas, sino por el estado del campo métrico en la vecindad inmediata a la posición del planeta. El espacio adquiere así una función que va más allá del papel del «medio» a través del cual las fuerzas se propagan o el «campo» actúa. El espacio es el campo en sí mismo, y su configuración determina los movimientos posibles de los cuerpos.

Ahora bien, el campo métrico cambia al modificarse la posición de los cuerpos. Dicho cambio no es instantáneo. Se trata de un efecto que se propaga de un punto a otro del espacio con una velocidad finita: la velocidad de la luz. Existe pues una relación entre «el estado del campo métrico» y la distribución de las masas. La teoría de la relatividad general culmina con esa relación cuya naturaleza conviene explicar en función de la perspectiva que hemos adoptado. Con tal fin, tomaremos como punto de partida la teoría electromagnética de Maxwell, reinterpretada desde el punto de vista de la teoría de la relatividad.

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

que es un caso particular de la forma (2), en el cual:

$$x_1 = x;\ x_2 = y;\ x_3 = z;\ x_4 = ct$$

y las componentes g_{ik} se reducen a la forma que utilizaba Galileo:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1;\ g_{44} = -1;\ g_{ik} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq k \qquad (3)$$

En presencia de un campo de gravitación los g_{ik} pueden siempre reducirse, en una región del espacio infinitamente pequeña y por un intervalo de tiempo infinitamente corto, a la manera de Galileo, por medio de una transformación apropiada de las coordenadas (es decir por medio de la utilización de un referencial inercial «local»). Pero no hay ninguna transformación que permita reducir las g_{ik} a la forma galileana (3) en todo el espacio. En otras palabras: en presencia de campos gravitacionales el espacio-tiempo es «localmente plano», pero es un espacio-tiempo «curvo» más allá de la vecindad del punto considerado. Los campos de gravitación son equivalentes a sistemas no-inerciales y, en consecuencia, son determinados por el tensor métrico.

8.5. El método utilizado por Marxwell en su *Tratado de electricidad y de magnetismo* continúa la línea de Lagrange. Las leyes que rigen los fenómenos electromagnéticos deben expresarse mediante ecuaciones «que hagan saltar a la vista su analogía con las ecuaciones de ciertos movimientos». Pero no se efectúa ninguna hipótesis referente a la naturaleza de esos movimientos. En la medida en que el fenómeno puede ser traducido por medio de las ecuaciones de Lagrange, las magnitudes que caracterizan al sistema pueden ser puestas en correspondencia con las variables y las velocidades que fijan la configuración y el movimiento de cierto sistema mecánico.

En la teoría electromagnética, cada partícula cargada crea un campo electromagnético cuyas propiedades se caracterizan por un vector de cuatro dimensiones Ai (funciones de las coordenadas espaciales y del tiempo) llamado potencial electromagnético. Cuando una partícula cargada se desplaza por el campo, está influenciada por el mismo pero, a su vez, su movimiento modifica al mismo campo. El movimiento de una partícula con una carga suficientemente pequeña como para que su desplazamiento no tenga influencia sobre el campo puede describirse fácilmente a partir de un principio de mínima acción [1]. La «acción» de la partícula está constituida por dos términos. El primer término corresponde a la integral de acción debida a la partícula considerada como «libre», es decir en ausencia de campo. Esta acción es:

$$S_m = -mc \int_a^b ds \,; \left(ds = \sqrt{-dx_i^2}\right).$$

El segundo término corresponde a la interacción de la partícula con el campo. Si se representa por A^i el potencial del campo en el instante t en el punto en que se encuentra la partícula de carga e, la acción es

$$S_{mf} = \frac{e}{c} \int_a^b A_i \, dx_i \,.$$

1. Seguimos aquí el método de Landau y Lifchitz.

El principio de mínima acción establece que

$$\delta S = \delta(S_m + S_{mf}) = 0.$$

En el caso más general de un sistema compuesto por un campo electromagnético y por las partículas que en él se encuentran, la acción puede ser considerada como constituida por tres partes: *a*) La acción debida a las partícuals consideradas como libres; *b*) La acción debida a la interacción de las partículas con el campo; *c*) La acción del campo en ausencia de cargas. Para encontrar las ecuaciones del movimiento de las partículas, se supone que el campo es conocido y por consiguiente se omite *c*). Para encontrar las ecuaciones del campo, se supone que los movimientos de las cargas son conocidos y se hace variar únicamente los potenciales del campo.

Llegamos así a las ecuaciones de Maxwell:

$$\frac{\delta F_{ik}}{\delta x_l} + \frac{\delta F_{li}}{\delta x_k} + \frac{\delta F_{kl}}{\delta x_i} = 0$$

$$(-g^{-1/2} \frac{\delta}{\delta x_k} [(-g)^{1/2} F^{ik}] = 0$$

donde $g = |g_{ik}|$, y F_{ik} es llamado tensor del campo electromagnético. Las componentes covariantes son:

$$F_{ik} = \frac{\delta A_k}{\delta x_i} - \frac{\delta A_i}{\delta x_k}$$

F_{ik} son las componentes contravariantes del mismo tensor.

Las componentes espaciales del tensor F_{ik} (las que están definidas por i, k=1, 2, 3) están en relación con el campo magnético; las componentes temporales (las que están definidas por i=4 o k=4) son las componentes del campo eléctrico.

A partir del mismo principio de mínima acción que condujo a las ecuaciones del movimiento, se puede también definir un tensor tal como el vector Pi que tiene por componentes a las integrales de los T_{ik} :

$$P_i = -\lambda \int T_{ik}\, dS_k$$

coincide con el vector de impulsión del sistema (ds_k es un elemento de una hipersuperficie que contiene todo el espacio de tres dimensiones). El tensor T_{ik} es el tensor de energía-impulso del sistema.

Se puede demostrar que, en el caso de un campo electromagnético sin fuentes, las ecuaciones de Maxwell permiten expresar el tensor de energía-impulso en función del tensor del campo electromagnético y del tensor métrico:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}\, F_{kl} - \frac{1}{4} F^2_{lm}\, \delta_{ik}\right).$$

Luego se puede seguir un camino paralelo al que ha llevado a las ecuaciones de Maxwell y llegar, igualmente a partir de un integral de acción, a las ecuaciones del campo de gravitación de Einstein. (Dicho tratamiento, que no es, sin embargo, el que originalmente siguió Einstein, presenta una gran sencillez y confiere una gran unidad al desarrollo de la teoría. Cf., por ejemplo, la *Física teórica* de Landau y Lifchitz, t. II: *Teoría del campo.*)

La única diferencia es que el campo gravitacional es aquí considerado como la modificación de la métrica del espacio-tiempo, es decir la modificación de ds en función de las dx_i. Por el principio de menor acción:

$$\delta S = mc\, \delta \int ds = 0.$$

Lo que significa que en un campo gravitacional una partícula se mueve de tal manera que describe una geodésica. La ecuación del movimiento se encuentra, pues, calculando la integral de:

$$\delta(ds) = \delta(g_{ik}\, dx_i\, dx_k).$$

El tensor de energía-impulsión T_{ik} de los cuerpos macroscópicos es por otra parte definido considerando que el fluir del impulso a través del elemento de superficie de un cuerpo es la fuerza que actúa sobre dicho elemento.

El principio de mínima acción, aplicado al campo gravitacional, conduce así, directamente, a las ecuaciones de Einstein:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\varkappa}{c^2} T_{ik}$$

donde: $\varkappa$ es la constante de gravitación de Einstein;
R es un invariante llamado curvatura escalar del espacio;
R_{ik} es el tensor de Ricci definido en función de las g_{ik} y de sus derivados exclusivamente;
T_{ik} es el tensor de energía-impulso que representa tanto los fenómenos gravitacionales como electromagnéticos.

Estas ecuaciones del campo de gravitación constituyen una sorprendente amalgama de geometría y de física. Pero, antes de analizar su significado, vamos a exponer el último paso adelantado en esa dirección por la física relativista.

§ 9 / LOS FUNDAMENTOS TEORICOS DE LA GEOMETRIZACION COMPLETA DE LA FISICA RELATIVISTA

Al surgir la geometrodinámica, a partir de los trabajos de Misner y de Wheeler, se puso en evidencia un hecho bastante singular de la historia de la física. Inmediatamente después de haber formulado la teoría de la relatividad general, Einstein trató de construir una «teoría unificada» capaz de combinar las leyes del electromagnetismo y de la gravitación en un solo sistema. Sus esfuerzos se prolongaron durante toda su vida.

Tenían por objeto rendir cuenta de todos los resultados de la mecánica cuántica a partir de una teoría unificada del campo. «Cuando murió Einstein (en 1956), su objetivo seguía pareciendo tan lejano como siempre», dijo Born en su libro *Einstein's Theory of Relativity* [1]. Sin embargo, ya en 1925, G. Y. Rainich, en un artículo titulado «Electrodynamics in the General Relativity Theory» (publicado en las *Transactions of the American Mathematical Society*) [1], había logrado combinar en un mismo sistema de ecuaciones las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de la gravitación de Einstein, demostrando así que, en ciertas condiciones muy generales, el campo electromagnético está enteramente determinado por la curvatura espacio-tiempo. Ese artículo permaneció ignorado hasta que fue redescubierto por Charles Misner, después de haber llegado éste, en 1956, a los mismos resultados pero a través de una vía independiente.

En esta historia existen tres hechos sorprendentes. El primero es que, durante más de treinta años nadie, ni siquiera Einstein, se dio cuenta de los resultados de Rainich. El segundo, la sencillez del método utilizado por Rainich y Misner, y el hecho de que las ecuaciones del campo unificado pudieran ser obtenidas «sin agregar nada» a las ecuaciones de Maxwell y de Einstein (desde entonces el nombre de «teoría ya unificada» utilizado por Misner y por Wheeler). El tercero, el hecho de que dicha «teoría unificada» no permitió avanzar suficientemente en el camino de la explicación de los resultados de la mecánica cuántica.

El procedimiento puede ser brevemente descrito de la siguiente manera. Las ecuaciones de Maxwell presentadas en la sección precedente:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

1. En inglés en el original.

$$(-g)^{-1/2} \frac{\delta}{\delta x_k} [(-g)^{1/2} F^{ik}] = 0$$

describen el campo electromagnético en términos de los mismos campos. El tensor de energía-impulso T_{ik} es luego calculado a partir de los campos por medio de la relación que ya hemos presentado y que es, en coordenadas curvilíneas, de la forma:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{il} F_k^l - \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm} \right).$$

Dicho tensor de energía-impulso está en relación con la métrica del universo por las ecuaciones del campo de gravitación o ecuaciones de Einstein:

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\varkappa}{c^2} T_{ik}$$

donde $\varkappa$ es la constante de gravitación de Einstein.

La geometrodinámica va a invertir el sentido del proceso: las ecuaciones del campo serán escritas en términos del tensor energía-impulso y luego los campos derivarán del tensor. Matemáticamente, el problema se resuelve expresando las componentes del tensor F en términos de G_{ik}, a partir de las dos últimas relaciones, y sustituyendo los valores así obtenidos en las dos primeras relaciones. Rainich y Misner lograron ese programa, fácil de formular pero matemáticamente complejo en su realización efectiva. El resultado se expresa en un sistema de ecuaciones que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\delta \alpha_i}{\delta x^k} - \frac{\delta \alpha_k}{\delta x^i} = 0$$

donde las α son definidas exclusivamente en términos de G_{ik}.

En la medida en que R_{ik} y R son a su vez definidas en términos del tensor métrico g, de componentes g_{ik}, se

desprende que este último sistema de ecuaciones que reúne las α entre sí no contiene más que propiedades del espacio-tiempo de Einstein. Se llega así a una descripción puramente geométrica: las ecuaciones son enteramente geométricas y describen situaciones físicas en las que puede haber tantos campos gravitacionales como campos geométricos. Según Misner y Wheeler, esos resultados sorprendentes proporcionan un apoyo considerable a un punto de vista que ellos expresan de la manera siguiente: «No hay nada en el mundo excepto el espacio curvo vacío. Materia, carga, electromagnetismo y otros campos no son más que manifestaciones de la curvatura del espacio», *Physics is Geometry* (Classical Physic as Geometry, *Annal of Physics,* 2 (1957), pág. 526)[1].

De una manera más precisa, los resultados muestran que: *a*) El campo gravitacional en un punto no es sino otro nombre dado a la curvatura del espacio-tiempo en ese punto («la masa desprovista de masa»); *b*) El campo electromagnético en un punto está determinado por la variación de esa curvatura a proximidad de dicho punto (¡«campo electromagnético desprovisto de campo electromagnético»!). Conviene aclarar, aunque no nos detengamos en ese hecho, que el espacio curvo del que hablamos no es topológicamente equivalente al espacio de Euclides: las así llamadas «cargas eléctricas» no son, en esta teoría, sino manifestaciones de las regiones del espacio de conexión múltiple.

Sin embargo, es preciso tener en cuenta que todos esos resultados no se aplican sino a la física clásica y relativista. En lo que se refiere a la mecánica cuántica, la situación es más compleja y el progreso casi inexistente (a pesar de ciertos resultados interesantes obtenidos por Wheeler). Por otra parte, no se ve cómo abordar el problema. Esto se debe al hecho de que no parece posible obtener las ecuaciones de Reinich y de Misner a partir de un principio de variación como en el caso de las ecuaciones de Maxwell y de Einstein, según el método esbozado en la sección precedente. Esto impone

1. En inglés en el original.

limitaciones a la aplicación de la teoría en el campo atómico. Dirac ha demostrado claramente que, cuando se logra formular una teoría clásica partiendo de un principio de acción de Hamilton, se pueden luego aplicar ciertas reglas standard para obtener una primera aproximación a una teoría cuántica (*Lectures on Quantum Mechanics,* Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964)[1]. Más aún: «En realidad, sin utilizar los métodos de Hamilton no pueden resolverse algunos de los problemas más simples en la teoría cuántica» (*ibíd.,* pág. 3).

Dejando de lado las dificultades que se encuentran cuando se trata de cuantificar la geometrodinámica, nos interesa destacar aquí que la reducción de la física relativista a una geometría del espacio curvo vacío plantea problemas de gran interés desde el punto de vista epistemológico, de los que vamos a ocuparnos a continuación.

§ 10 / ¿REDUCCIONISMO O SINTESIS?

Las ecuaciones de la gravitación en la teoría general de la relatividad constituyen el apogeo de las ideas —ya citadas— de Riemann: «Es preciso, pues, o que la realidad sobre la que se funda el espacio forme una variedad discreta, o que el fundamento de las relaciones métricas sea buscado fuera de éste, en las fuerzas de unión que actúan sobre él». Einstein logró esa amalgama de la geometría y de la física de la cual Leibniz ya había tenido una intuición. Al escribir dichas ecuaciones bajo la forma:

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\varkappa}{c^2} T_{ik}$$

el tensor T_{ik} , tensor energía-impulso, actúa como una fuente del campo gravitacional. Pero, tanto R_{ik} como R no contie-

1. En inglés en el original.

nen más que el tensor métrico g y sus derivadas. En consecuencia, las G_{ik} constituyen entidades puramente geométricas. Las diez cantidades g representan pues, al mismo tiempo, el campo métrico y el campo de gravitación, que no son sino dos aspectos diferentes de una misma cosa.

Sin embargo, esas ecuaciones han sido interpretadas de diversas maneras desde que fueron formuladas por Einstein en 1916. Al principio, fueron interpretadas como un triunfo del cartesianismo, es decir como una reducción de la mecánica a la geometría. Weyl. por ejemplo, consideró que modificaban «la vieja concepción» de la física, que podría expresarse de la siguiente manera:

«El *continuum* métrico de cuatro dimensiones es el teatro de los fenómenos físicos; las entidades físicas son precisamente lo que existe en este universo, y nosotros debemos aceptarlas específicamente y cuantitativamente como la experiencia nos lo indica» (*op. cit.,* pág. 249).

La nueva concepción nos lleva, según Weyl, a la siguiente consecuencia:

«El universo es una multiplicidad métrica de (3+1) dimensiones; todos los fenómenos físicos son emanaciones de su métrica.»

Y agrega:

«El sueño de Descartes de una física puramente geométrica parece realizarse de una manera completamente natural e imprevista.»

A pesar de la autoridad de Weyl, parecería más coherente interpretar la ecuación de otra manera: no es que la teoría de la gravitación haya sido geometrizada; es que la geometría se ha convertido en la expresión del campo gravitacional. Con esta interpretación, la geometría queda definitivamente establecida sobre sólidas bases. No solamente la geometría del universo se puede *establecer* empíricamente, sino, ade-

más, se puede *explicar* por el solo efecto de las fuerzas. Un defensor característico de esta posición es Reichenbach (*The Philosophy of Space and Time*[1], págs. 256-257). Acepta que la combinación del movimiento de los planetas con el movimiento de una partícula libre en una única y misma ley que establece el movimieno a lo largo de toda una geodesia sugiere una concepción puramente geométrica de la gravitación. Pero, agrega, los cambios en el campo métrico se deben a cambios en la distribución de la materia, que se propagan a la velocidad de la luz. No solamente el campo métrico está determinado por «un verdadero proceso físico de propagación causal» sino, además, «el efecto del campo métrico sobre el planeta puede ser interpretado como una verdadera fuerza física que lo guía en su camino».

Esta concepción de la teoría einsteiniana constituye, claramente, la consecuencia extrema de las ideas de Leibniz. No hay espacio ni tiempo independientemente de la materia; no hay «acción a distancia» a través de un espacio vacío. Sólo existe la materia y las fuerzas que actúan sobre ella. Todo lo demás —inclusive el espacio y el tiempo— no es más que una consecuencia.

Paradójicamente, esa «fisicalización» de la geometría es de nuevo controvertida cuando la geometrodinámica logra la unificación del campo de gravitación y del campo electromagnético en un solo sistema de ecuaciones. En efecto, la teoría «ya unificada» de la relatividad general llega a un sistema de ecuaciones en las que no aparecen sino relaciones entre variables que designan entidades geométricas. Dichas ecuaciones se obtienen por eliminación de las variables que designan entidades «físicas» entre las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético y las ecuaciones de Einstein del campo gravitacional. Ese desvío *a través* de las relaciones que no son de naturaleza puramente geométrica parece inevitable. Pero antes de analizar ese problema, consideremos algunas de las consecuencias inmediatas de la teoría:

1. En inglés en el original.

a) En la medida en que las ecuaciones de la dinámica se transforman en ecuaciones que no relacionan sino entidades geométricas, la única magnitud que subsiste es la longitud. Las medidas de peso (o de masa), expresadas en gramos, por ejemplo, no son sino abreviaciones convenientes de relaciones entre longitudes expresadas en centímetros;

b) Ya no hay más «constantes físicas». La velocidad de la luz, por ejemplo, no es más que un número que expresa relaciones entre diversas unidades de longitud *just as 5280 is the factor of conversion between miles and feet*[1];

c) Las cargas eléctricas no son entidades extrañas que existen *en* el espacio, sino características *del* espacio. En realidad, no son más que una manifestación de regiones del espacio de conexión múltiple;

d) Los objetos son nombres atribuidos a localizaciones de ciertos tipos de curvatura en el espacio vacío.

¿Podría pensarse en un cartesianismo más absoluto que el que se expresa por esas cuatro proposiciones?

Sin embargo, esto no implica que la física —o incluso la mecánica clásica y relativista— sea «simplemente» una geometría. En ese espacio curvo *vacío* hay aún movimientos e interacciones sometidos a leyes que deben ser postuladas *además* de los postulados de la geometría y que están sometidos a la confirmación (o infirmación) experimental.

En ese espacio curvo vacío hay aún «fenómenos físicos». ¿Dónde se encuentra pues el vínculo entre las ecuaciones «puramente geométricas» de la «teoría unificada» y dichos «fenómenos físicos»? La respuesta debe buscarse precisamente en la definición de los conceptos «geométricos» que intervienen en las ecuaciones; en particular, en la naturaleza de las g que expresan la métrica del espacio. La relación fundamental $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ determina el valor del intervalo s en el espacio-tiempo. En la definición de las g los elementos de la

1. En inglés en el original.

matriz que corresponden a la variable «tiempo» no pueden ser reemplazados por los otros.

La noción de «intervalo» en el espacio-tiempo de Minkowski, utilizada por la teoría restringida de la relatividad y definida por la forma cuadrática ds^2, comprende una distinción entre «intervalos del género tiempo» e «intervalos del género espacio» que tiene un carácter absoluto. Un intervalo es del género tiempo o del género espacio con toda independencia respecto del sistema de referencia. La «fusión» de espacio y tiempo en la teoría restringida de la relatividad no es, pues, completa. Desde el punto de vista matemático la distinción es clara, puesto que un intervalo del género tiempo está representado por un número real, mientras que un intervalo del género espacio está representado por un número imaginario. La teoría general de la relatividad utiliza un espacio-tiempo riemaniano que es «localmente» idéntico al espacio-tiempo de Minkowski. Esto significa, simplemente, que todo espacio en el sentido de Rieman es un espacio euclidiano en un campo infinitesimal. El espacio y el tiempo aparecen amalgamados en la representación del espacio-tiempo (euclidiano) de Minkowski únicamente en la medida en que, además de una región de «futuro absoluto» y una región de «pasado absoluto», hay regiones —respecto de un «punto» (espacio-temporal)— en las que el pasado y el futuro son indeterminados. Pero *hay* un futuro «absoluto». Su definición no está relacionada con otra cosa que la propagación de las señales y la existencia de una velocidad de propagación límite. En el corazón mismo de la «métrica» espacio-temporal se encuentran pues los acontecimientos físicos, las señales que se propagan, la sucesión de acontecimientos que se identifican como pertenecientes a una cadena causal. Si la física relativista puede ser reducida a relaciones en las cuales no interviene más que el tensor métrico del espacio de cuatro dimensiones, no es menos cierto que dicho tensor está desprovisto de todo significado fuera de un mundo adonde hay acontecimientos físicos y cadenas causales.

Al llegar a este punto, es difícil decir si se ha logrado una

geometrización completa de la mecánica, o lo inverso. Parecería más bien que se trata de una convergencia de conceptos hacia una síntesis común, más que de un proceso de reducción de una disciplina a la otra. En último análisis, no queda más que un «campo» cuyas diferentes partes interactúan y soportan desplazamientos mutuos. Que dicho campo se llame «geométrico» o «físico», parece ser una decisión arbitraria. El hecho de que los que intervienen en las ecuaciones «unificadas» sean considerados como elementos geométricos resulta mucho más de una tradición histórica que de una afirmación basada en una distinción que pueda ser fundada sin caer en un círculo vicioso. Unicamente las investigaciones genéticas sobre el origen de las nociones que intervienen en las ecuaciones de base podrían dar a esta distinción el fundamento requerido.

Impreso en el mes
de marzo de 1973
en los talleres de
GRÁFICAS DIAMANTE,
Zamora, 83, Barcelona